EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

10e JAARGANG 1933/34, Nr. 1

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het voor Nieuw Tijdschrift Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☛ **Zie vooral het Naschrift op blz. 12; voor Indië wordt de datum verschoven tot 1 Maart 1934**

i

DOOR

P. WIJDENES.

Een kortere titel dan die enkele *i* zal men allicht niet kunnen vinden; moge de invloed, die van het volgende uit zal gaan omgekeerd evenredig zijn met de grootte van het opschrift. „Uit zal gaan", want dat dit over de heele linie werkelijkheid zal worden, durf ik niet te onderstellen. Alweer wou ik nl. een aanval doen op sleur; als het breken met sleur tot gevolg heeft, dat onnoodige moeilijkheden worden weggenomen en dat er minder aanleiding is tot schijngeleerdheid en dikdoenerij, dan geloof ik, dat een groot deel van de collega's wel een handje wil helpen.

Ik wou nl. niets meer of minder dan i geheel verwijderen uit onze schoolwiskunde, tenzij men voor een niet al te oppervlakkige behandeling in de hoogste klas de tijd weet te vinden. [1])

Voor geen enkel ander schoolvak is het noodig, dat de leerlingen vooraf kennis hebben gemaakt met de imaginairen; blijft dus alleen de wiskunde voor zich zelf. De onderdeelen vlakke meetkunde, stereometrie, driehoeksmeting en beschrijvende meetkunde kennen geen imaginairen. Een rechte snijdt een cirkel, raakt een cirkel of ligt buiten de cirkel; wie denkt er aan zijn leerlingen in de tweede klas te vergasten op: elke rechte snijdt elke cirkel in twee punten met de onderscheiden gevallen van twee verschillende punten, twee samenvallende of twee toegevoegd imaginaire. Toch vindt men de stof voor de imaginairen bij de wortelvormen, die in de tweede klas aan de beurt komen, dus zou er aanleiding toe kunnen zijn het geleerde toe te passen bij de cirkel.

---

[1]) Men leze vooral ook het welsprekend betoog van Dr. Beth in „Euclides" Jg. V blz. 110—121 onder de titel „*De behandeling der complexe getallen*".

In het „Ontwerp van een leerplan" (zie Bijvoegsel van het N. T. v. W. Jg. II 1925/26 blz. 113 en volgende) ontbreekt voor de 2e klas de behandeling van de imaginairen. Voor de 5e klas staat opgegeven „algebraïsche behandeling van het complexe getal".

Men zegt in de stereometrie, dat twee bollen, die geheel buiten elkaar liggen, geen enkel punt gemeen hebben, toch zeker niet, dat hun snijlijn enkel imaginaire punten heeft? Van $\sin x = 2$ wordt alleen gezegd, dat dat niet kan; over de Beschrijvende Meetkunde praten we niet eens. Rest ons de Algebra zelf; $\log -3$ „kan niet", volkomen in orde op school. Het eenige, wat wel „kan" is $\sqrt{-4}$; dat is immers $2\sqrt{-1}$ of $2i$!! Beteekent dat iets, zegt dat wat? Dat willen we nu eens nagaan en nu kan ik niet beter doen, dan onze schoolboeken opslaan om te zien, hoe de imaginairen daarin worden behandeld; de bedoeling van de schrijvers kan toch geen andere zijn, dan dat ze zich voorstellen, dat de leerstof den leerlingen zal worden bijgebracht op de manier, die ze in de boeken aangeven.

We beginnen dan maar met wat voor de hand ligt, nl.

1. *Wijdenes en De Lange,* Leerboek der Algebra II.

Daar we vroeger geleerd hebben, dat machten met een even getal als exponent positief zijn, bestaat er geen enkel algebraisch getal, dat gelijk is aan de even wortel uit een negatief getal.

Zoo is b.v. $\sqrt{-4}$ niet gelijk aan $+2$ en ook niet gelijk aan -2; $\sqrt[2n]{-a^{2mn}}$ is niet gelijk aan $+a^m$ en ook niet aan $-a^m$.

We vinden dus:

Evenmachtswortels uit negatieve getallen kunnen niet door een positief of negatief getal worden voorgesteld. Ze vormen een geheel nieuwe groep van getallen en worden **imaginaire getallen** genoemd. In tegenstelling daarvan heeten alle andere getallen **reëele getallen.**

Dus zijn $\sqrt{-4}$ en $\sqrt[2n]{-a^{2mn}}$ beide imaginaire getallen. De eenvoudigste imaginaire getallen zijn $+\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; men noemt $\sqrt{-1}$ de imaginaire eenheid; deze wordt gewoonlijk voorgesteld door de letter i. In plaats van $2\sqrt{-1}$ schrijft men dus $2i$. Uit deze bepaling volgt onmiddellijk, dat $i^2 = -1$ is.

In plaats van $\sqrt{-4}$ kan men ook schrijven $\pm 2i$, want: $(\pm 2i)^2 = +4i^2 = -4$.

Evenzoo schrijft men in plaats van $\sqrt{-5}$ nu $i\sqrt{5}$; van beide is het kwadraat toch -5.

2. *Wijdenes en Beth,* Nieuwe School-algebra II.

We vragen ten slotte naar de even wortel uit een negatief getal,

en bepalen ons tot de vierkantswortel. Willen we de gewone definitie woordelijk handhaven, dan moeten we onder $\sqrt{-9}$ het getal verstaan, waarvan het vierkant gelijk is aan -9. We zouden geneigd zijn te zeggen, dat zulk een getal niet bestaat; inderdaad is het vierkant van elk getal, dat we kennen, een positief getal. We hebben echter reeds enkele malen de verzameling der getallen uitgebreid en passen thans opnieuw deze maatregel toe. We voeren als nieuwe getallen de getallen in, die als eigenschap hebben, dat hun vierkant een negatief getal is. Dat deze uitbreiding werkelijk mogelijk is, zullen we pas later kunnen aantoonen; we zullen dan ook weer de bewerkingen met die getallen definieeren, de geldigheid der eigenschappen voor die bewerkingen bewijzen, enz. Thans doen we weder, alsof dit alles reeds had plaats gehad; de nieuw ingevoerde getallen noemen we **imaginaire** getallen; in tegenstelling daarmee noemen we de ons reeds bekende getallen **reëel**.

Als we aannemen, dat de geldigheid van de eigenschappen der bewerkingen blijft doorgaan, dan mogen we voor $\sqrt{-a}$, waarin a een positief getal voorstelt, schrijven $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{-1}$, d.w.z. we kunnen elk imaginair getal schrijven als het product van een reëel getal en $\sqrt{-1}$; gemakshalve stellen we $\sqrt{-1}$ voor door i. We schrijven dus $\sqrt{-9}$ als $3i$, maar moeten bedenken, dat zoowel $-3i$ als $+3i$ als vierkant heeft -9.

De volgende aanhalingen geven we zonder vermelding van de naam of de namen van de schrijvers.

3. Vraagt men naar een getal x, dat, tot de tweede macht verheven, 5 oplevert, dan heeft men de vergelijking $x^2 = 5$ op te lossen. Men krijgt als oplossing $x = \pm \sqrt{5}$. Vraagt men echter naar een getal, waarvan het kwadraat gelijk is aan -5, heeft men dus op te lossen de vergelijking $x^2 = -5$ of $x^2 + 5 = 0$, dan zal men antwoorden, dat dit niet gaat, omdat er geen enkel getal, noch een positief noch een negatief is, dat in het kwadraat verheven een negatieve uitkomst oplevert. Wij zien ons hier voor een soortgelijke moeilijkheid geplaatst als wanneer gevraagd wordt, 7 van 4 af te trekken, indien men slechts over positieve getallen beschikt. Uit deze laatste moeilijkheid redden wij ons door de invoering van een nieuw soort getallen, namelijk de *negatieve*, waardoor aftrekkingen ook mogelijk worden, wanneer de aftrekker grooter is dan het aftrektal.

De oplossing der vergelijking $x^2 + 5 = 0$ of $x^2 = -5$ zullen wij nu ook mogelijk maken door de invoering van een nieuw soort getallen, waarvan het kwadraat negatief is, de zoogenaamde *imaginaire getallen.* Onder i verstaat men $\sqrt{-1}$, de zoogenaamde *imaginaire eenheid;* per definitie geldt dus $i^2 = -1$.

De oplossing der vergelijking $x^2 = -5$ wordt dus $x = \pm \sqrt{-5} = \pm \sqrt{-1} . \sqrt{5} = \pm i\sqrt{5}$. Opgemerkt wordt, dat men met i mag werken als met ieder ander getal; dit moet natuurlijk bewezen worden, doch het bewijs wordt hier achterwege gelaten.

4. Evenmachtswortels uit negatieve getallen.

$\sqrt{-4}$ is noch $+2$, noch -2, omdat $(\pm 2)^2 = +4$ en niet -4 is.

$\sqrt[6]{-a^{12}}$ is noch $+a^2$, noch $-a^2$, omdat $(\pm a^2)^6 = +a^{12}$ en niet $-a^{12}$ is.

In het algemeen: $\sqrt[2n]{-a^{2np}}$ is noch $+a^p$, noch $-a^p$.

Wij leeren hieruit:

Evenmachtswortels uit negatieve getallen zijn **noch positief noch negatief.** *Zij kunnen dus niet voorgesteld worden door de algebraische getallen, die men tot nu toe heeft leeren kennen, en vormen daarom* **een nieuwe soort van getallen,** *die men* **imaginaire getallen** *noemt.*

In tegenstelling met de imaginaire getallen noemt men alle andere **reëel.**

De imaginaire getallen worden later behandeld.

(Inderdaad, dit wordt gedaan; omvang 13 blz. techniek).

5. Evenmachtswortels uit negatieve getallen.

De tweede macht van elk positief en van elk negatief getal is positief. Er bestaat dus geen enkel positief of negatief getal, dat tot de tweede macht verheven, een negatief getal (b.v. —9) oplevert. Hetzelfde geldt voor iedere evenmacht.

Evenmachtswortels uit negatieve getallen kunnen dus niet voorgesteld worden door de algebraische getallen, die wij leerden kennen. Zulke wortels (bv. $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-625}$) noemt men **imaginaire wortels** of **imaginaire getallen.** De positieve en negatieve getallen noemt men in tegenstelling met de imaginaire getallen, die in deel III behandeld zullen worden, **reëel.** — Na een herhaling van

het bovenstaande wordt in deel III als volgt verder gegaan: De eenvoudigste imaginaire getallen zijn $+\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; zij heeten de **positieve** en **negatieve imaginaire eenheid** en worden gewoonlijk voorgesteld door $+i$ en $-i$.

(Volgt verder 11 blz. theorie, waarop wel een en ander is af te dingen en wat techniek).

6. Imaginaire getallen. Zooals reeds meermalen is opgemerkt, is y in $y = x^2$ voor alle waarden van x positief. Is dus $x^2 = -3$, dan is x onbestaanbaar. Dergelijke uitzonderingen nu tracht men in de wiskunde steeds op te heffen.

Men heeft daarom een nieuw soort getallen ingevoerd. Men schrijft $x = \pm\sqrt{-3}$ en verstaat onder $\sqrt{-3}$ het getal, welks kwadraat -3 is. Deze getallen heeten **imaginair** (denkbeeldig, onbestaanbaar), in tegenstelling met de tot nu toe behandelde, die **reëel** (werkelijk) worden genoemd.

Definitie. **Onder $\sqrt{-a}$ verstaat men het getal, welks vierkant gelijk is aan $-a$.**

Voor $\sqrt{-a}$ schrijft men $\sqrt{-1} \times \sqrt{a}$ en stelt $\sqrt{-1}$ voor door i. Dus $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$.

Daarna behandelt men dit getal, alsof i een gewone factor is en neemt $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$. Het meest algemeene getal is een tweeterm, waarvan de eene term reëel, de andere imaginair is. Bijvoorbeeld:

$3 + \sqrt{-5} = 3 + i\sqrt{5}$; $7 - 2\sqrt{-3} = 7 - 2i\sqrt{3}$
algemeen $a + \sqrt{-b} = a + bi$.

Deze getallen heeten *complex*.

7. Uit een Belgisch algebra-boek. [1])

Bepalingen. — *Een imaginaire wortelvorm is een uitdrukking die den vorm $\sqrt{-a}$ heeft.*

Dit algebraisch symbool wordt beschouwd als de vierkantswortel van een *negatief getal*; men heeft dus

$$(\sqrt{-a})^2 = -a.$$

---

[1]) Philippens en De Huisser Algebra, theoretische en practische leergang.

Als een algebraische uitdrukking minstens één imaginaire wortel bevat noemt men haar *imaginaire uitdrukking.*

Bij voorbeeld

$$a + \sqrt{-b}.$$

In tegenstelling wordt een uitdrukking, die niet imaginair is, reëel genoemd.

$\sqrt{-1}$ of i. — Men komt overeen op de imaginaire wortels dezelfde regels toe te passen als op de reëele wortels.

Zoo heeft men, door uitbreiding van den regel op het product van wortels tot de imaginaire wortels, bij voorbeeld

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 . (-1)} = \sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2 . \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1},$$
$$\sqrt{-7} = \sqrt{7 . (-1)} = \sqrt{7} . \sqrt{-1} = \sqrt{7}\ \sqrt{-1}.$$

Meer algemeen $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\ \sqrt{-1}.$

Dus kan iedere imaginaire wortel $\sqrt{-a}$ vervormd worden tot een product van een reëelen wortel $\sqrt{a}$ met den imaginairen wortel $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-1}$ wordt de *imaginaire eenheid* genoemd. Men stelt $\sqrt{-1}$ voor door i.

8. Vertaling van de inleiding over de imaginairen uit een Italiaansch boek voor de middelbare school. [1])

330*d*. Ten slotte, als a een negatief getal is en de wortelexponent is een even getal $2n$, dan bestaat er geen reëele waarde voor de wortel, volgens de regel van de teekens, want zoowel een positief als een negatief getal hebben als $2n^e$ macht een positief getal. Zoodat *een even wortel uit een negatief getal niet bestaat in het gebied van de reëele getallen.*

354. Wij hebben in nr. 330*d* gezien, dat een even wortel uit een negatief getal niet bestaat onder de reëele getallen; in het bijzonder bestaat de vierkantswortel uit een negatief getal niet in het gebied van de reëele getallen.

Is het mogelijk, een beteekenis te hechten aan zoo'n wortel door middel van een gepaste uitbreiding van het begrip getal?

De letters, die wij gebruiken in de algebra en die reëele getallen

---

[1]) Salvatore Pincherle Lezioni di algebra elementare ad uso delle scuole medie superiori.

voorstellen, worden verbonden door zekere bewerkingen, genaamd optelling, vermenigvuldiging, machtsverheffing enz., bewerkingen, met bepaalde rekenregels.

In verbinding met de letters, die reëele getallen voorstellen, beschouwen we nu een nieuw symbool, waaraan we niet de beteekenis van eèn reëel getal hechten, maar waaromtrent we overkomen, dat het verbonden kan worden met de voorgaande door de bewerkingsteekens van de reëele getallen en dat de rekenregels en de eigenschappen formeel dezelfde blijven, als die, welke zijn vastgesteld voor de reëele getallen. Omtrent dit symbool, dat wij volgens gewoonte voorstellen door i, maken wij de volgende afspraken:

a. Het symbool i stelt geen reëel getal voor. De andere letters, die wij zullen gebruiken, stellen daarentegen reëele getallen voor.

b. Als de letter i voorkomt in een algebraische uitdrukking, dan passen we daarop de formeele regels toe van de bewerkingen zooals met willekeurige andere letters, die reëele getallen voorstellen.

De schrijfwijze $a + i$, $a\,i$, ... wordt genoemd optelling van i bij a, vermenigvuldiging van a met i, ... Van deze spreekwijzen geven we geenerlei definitie, maar we behandelen ze, we herleiden de vormen volgens de eigenschappen, die gelden voor reeële getallen.

Aldus: de symbolen ai en ia kunnen worden verwisseld en men schrijft $ai = ia$; eveneens dus $a + i = i + a$, enz.; dus zal ook $bi = 0$ zijn, als en alleen dan als $b = 0$ is. Ook worden de gelijkheden van uitdrukkingen, die i bevatten, behandeld als gewone gelijkheden.

c. Men voert de begrippen grooter en kleiner voor uitdrukkingen, die i bevatten, niet in.

d. Telkens als in het rekenen, de vermenigvuldiging van i met zich zelf voorkomt, dus $i \,.\, i$ of i^2, vervangen we dit door -1:

$$i^2 = -1.$$

355. Het teeken i heet imaginaire eenheid. Het product $ai (= ia)$, waarin a een willekeurig reëel getal is, heet imaginair getal. Het imaginaire getal wordt positief of negatief genoemd, al naar a positief of negatief is. De getallen ai en $(-a)i$ of $-ai$ heeten tegengesteld.

356*a*. Een tweeterm van de vorm $a + bi$ wordt complex getal genoemd; a heet het reëele deel, bi het imaginaire deel van hetzelfde complexe getal.

b. Twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ heeten gelijk, als $a = c$ en $b = d$ is en alleen in dit geval. Men schrijft kortweg $a + bi = c + di$. Deze bepaling bevat de formeele eigenschap van het gelijk zijn."

We eindigen met de aanhalingen; ik heb geen enkel Fransch schoolboek, ook geen enkel Duitsch, dus kan ik die slecht aanhalen; over een Belgisch boek in het Fransch geschreven, straks. Opzettelijk haal ik niet aan, wat er van de imaginairen staat in Nieuwe School-algebra IV, noch in mijn Lagere Algebra I; ik beperk mij tot wat in de schoolboeken blijkbaar voor de 2e of 3e klas bestemd is. En dan moet het mij van het hart, dat al die aanhalingen al heel weinig om het lijf hebben; aanmerkingen zijn op alle te maken, op de eene wat meer, op de andere wat minder; de eerste zijn het talrijkst.

Ik wil niet vragen, wat het beste is van de 8 aangehaalde stukjes; laten we liever zeggen, welke de minst slechte zijn; dan lijkt me toe, dat dat nr. 2 en nr. 8 zijn; over de andere zwijgen we geheel; ze wijken ook niet noemenswaard af. Maar lees nu 2 en 8 eens aandachtig over, woord voor woord; is dat voor schoolkinderen van een tweede klas? Wat beteekent dat al met al voor hen? Het is alsof de leeraar op een verhooging staat, achter zich kijkt naar wat hij gedaan heeft in de 1e klas bij de negatieve getallen, nu echter een verschiet opent, waar nog heel wat anders ligt, dan ze tot zoover aanschouwden. Of het hen bevredigt en of we niet veel te hooge eischen stellen aan de leerlingen, zie, dat is voor mij geen vraag, maar voor U ook niet. Behandelt men de zaak zooals nr. 8 en dan prima uitgelegd, dan is het goed, maar het is ongeschikt voor de 2e klas; nr. 2 doet het nog zoo kwaad niet; dat zegt: later (in deel IV) zullen we dat wel eens naar den eisch in orde maken; ga nu je gang maar. Bevredigt dat? Natuurlijk ook niet. Maar toch is het beter, dan te probeeren het „onbestaanbare" (ellendiger woord is er niet, imaginair is al even slecht) te willen „verklaren". In zijn soberheid is 1 nog zoo kwaad niet; maar zooals gezegd, de invoering, zooals nr. 8 dat doet (dit komt het meest nabij bij wat de Nieuwe School-algebra IV vrij uitvoerig geeft) is verre te verkiezen boven de andere. Ook logisch, volmaakt logisch; wij zitten nog te veel vast aan wat te kwader ure in lang vervlogen tijd uit een voor volwassenen bestemd leerboek verkort en „vereenvoudigd'

werd overgenomen;[1]) en toen plaatste men de imaginairen direct na de wortelvormen. Zeker, daar zullen ze wel hun oorsprong gevonden hebben, maar dat is geen reden om op het verkeerde pad voort te blijven gaan. *Het moet, zooals wij dat voorstellen:* **algeheele verwijdering** uit deel II (bij alle schrijvers) en òf niet meer noemen op de Middelbare school òf in de 5e (6e)klas de imaginairen eenigszins behoorlijk bespreken; ik ben vóór het eerste, althans indien voor het tweede de tijd ontbreekt, wat doorgaans wel het geval zal zijn!

Ik keer terug tot de schoolboeken en de vraagstukken. Gemakkelijk is de jongens de techniek met *i* bij te brengen, om het zoo eens te zeggen, maar wat heeft dat in? Wat moet dat? Waar is het goed voor; voor de vormende waarde soms? Voor de techniek op zich zelf? Ettelijke bladzijden techniek enkel en alleen om herleidingen te laten maken, als nr. 4 ze geeft:

$$\frac{\sqrt{-3}+\sqrt{-10}+\sqrt{-7}}{\sqrt{-3}+\sqrt{-10}-\sqrt{-7}}; \quad \sqrt[4]{-28-16\sqrt{-12}},$$

om er maar een paar aan te halen als afschrikwekkende voorbeelden (die nr. 4 maakt het al heel bont in dat opzicht; alle anderen hebben zich tenminste binnen redelijke grenzen gehouden; ook zij gaan echter niet vrij uit).

Waar het goed voor is, liever: waarom de imaginairen behandeld worden? *Enkel en alleen om bij de vierkantsvergelijkingen te kunnen zeggen, dat deze allemaal twee wortels hebben;* in welke woorden en met welke overzichten, dat behoef ik hier natuurlijk niet neer te schrijven. (Vandaar waarschijnlijk, dat eenige schrijvers zich beperken tot een klein beetje techniek met de imaginairen). Is daar nu geen ontkomen aan, zoodat we de zinlooze theorie en de

---

[1]) In een bespreking door Schogt, te vinden op blz. 214 van Jg. IX staat: „Wij hebben hier dus te doen met een der niet zeldzame gevallen, waarin een onderwerp (uit de Mechanica) dat door gebrekkig inzicht van een vorige generatie in de leerstof van de middelbare scholen is opgenomen, door sleur en traditie op het programma is gehandhaafd. De leerstof van dergelijke onderwerpen te zuiveren is een eerste eisch voor saneering van het onderwijs. Moge de poging daartoe succes hebben." Maar onmiddellijk daarop laat hij volgen: „Wie, zooals ondergeteekende, weten, hoe sterk de voorliefde voor het traditioneele is — zij het dan nog zoo foutief — zijn hierop niet heel gerust."

Met deze woorden stem ik volkomen in; als dit zou slaan op „*i*", dan moet „foutief" worden vervangen door „zinloos en nutteloos."

malle vraagstukken overboord kunnen gooien? Is die theorie gezien de 8 voorbeelden, niet zinloos voor kinderen, voor ons niet net zoo, zoo zinloos, dat de heel enkele, die doorgaat in wiskunde, goed doet met vooral niet zijn schoolboek op te slaan. Zijn de bewerkingen „met *i*" niet volslagen noodeloos voor alle andere schoolvakken, ook voor de verdere algebra? Is het niet beter, dat de jongens haasje over spelen dan vormen herleiden als

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^4,$$

om er een uit Nieuwe School-algebra II te nemen (slechts kinderspel, vergeleken bij de opgaven, die door nr. 4 worden gevergd).

Hoe we van de imaginairen afkomen? Doodeenvoudig: de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft geen wortels, als $b^2 - 4ac = D < 0$ is; $ax^2 + bx + c$ heeft geen nulpunten, als $D < 0$ is; dat komt ook zoo mooi uit met de grafiek; immers voor $D < 0$ snijdt de grafiek de X-as niet; $ax^2 + bx + c$ is ook niet te ontbinden in lineaire vormen in x, als $D < 0$ is.

Dat is alles; de heele theorie van de vierkantsvergelijking en van de kwadratische functie wordt er sterk door vereenvoudigd en verhelderd. Thans bestaat nog het eigenaardige geval, dat $x^2 + x + 1 = 0$ wel twee wortels heeft, $x^2 + x + 1$ echter geen nulpunten; er is toch wel niemand, die de jongens leert, dat $x^2 + x + 1$ imaginaire nulpunten heeft, wel? De waarden van x, waarvoor $f(x)$ nul wordt, heeten nulpunten van $f(x)$; bij het maken van de grafiek zijn het de snijpunten van $y = f(x)$ met de x-as. Dat begrijpen de leerlingen wel, maar „imaginaire nulpunten", dat schemert hun voor de oogen, of het is volslagen duisternis en..... daar zijn ze zelf niet schuldig aan, maar wij.

Het bovenstaande hebben Beth en ik overwogen toen de uitgever ons de copie vroeg voor een herdruk van Nieuwe School-algebra II; daarin is een eind gemaakt aan: $ax^2 + bx + c = 0$ heeft twee wortels, wat a, b en c ook zijn; we zeggen nu: $x^2 + x + 1 = 0$ is een eisch, waaraan niet kan worden voldaan; (evenmin als aan $3x + 5 = 3x + 7$, aan $\sin x = 1\frac{1}{2}$, aan $2^x = -3$). De grafiek van $y = x^2 + x + 1$ snijdt de X-as niet; $x^2 + x + 1$ is immers $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; de som van twee positieve getallen kan toch niet 0 zijn. En nu kan men met schijngeleerdheid en zwaarwichtig gedoe daar wel een draai aan geven, maar is dat in het belang van

de jongens en is het ergens goed voor? Ons antwoord vindt men in het bovenstaande.

Dit stukje is geschreven, nadat de copie voor deel II klaar gemaakt was; ik zeg dit er bij, om direct al te antwoorden op: „jullie hebt ze zelf ook, die imaginairen, jullie bent geen haar beter dan alle anderen". Heb ik zelf ook al gezegd, *maar nu willen we breken met ons verleden, omdat het geen nut heeft en ook niet ontwikkelend is* die „behandeling" van de imaginairen, het maken van sommen met i en het schermen met zinlooze woorden.

Nu had ik nog gezegd, terug te zullen komen op het Belgische algebra-boek; dat is van Dr. V. Herbiet,[1]) dat hij mij met zijn „Hommage respectueux" voor een paar maanden toezond. Ik lees daar:

„Un nombre negatif n'a pas de racine carrée; car on vient de voir que le carré de tout nombre est positif. (Meer niet!)

Bij de besprekingen van $ax^2 + bx + c = 0$:

Troisième cas . $b^2 - 4ac < 0$. L'équation est impossible. Donc le nombre de racines de l'équation du second degré dépend du signe de la quantité $b^2 - 4ac$.

Onder het hoofd: Le trinome du second degré:

Troisième cas: $b^2 - 4ac < 0$. La forme $y = ax^2 + bx + c$ est remplacée par la suivante:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Si nous désignous par K^2 la quantité positive $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, nous obtenons $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right]$; (hiermee weer afgeloopen).

Onder: Signe du trinôme:

Troisième cas: $b^2 - 4ac < 0$. La forme

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right]$$

montre que $\frac{y}{a}$ est une somme de deux carrés qui est constamment positive.

Hiermee ben ik het volmaakt eens; korter, beter en duidelijker

---

[1]) Dr. V. Herbiet, Traité d'Algèbre élémentaire; een boek dat in vele opzichten verder gaat dan N. S. Alg. III.

kan het niet. Dr. Beth heeft hetzelfde voorgesteld in het artikel, dat op blz. 1 in de noot wordt genoemd. [1]) We gaan nu opruiming houden en we hopen en vertrouwen, dat de vakgenooten ons op deze weg zullen willen volgen.

---

[1]) Men leze ook wat Prof. Van Rooy (Potchefstroom) schreef op blz. 196 van de vorige jaargang (Jg. IX) onder het opschrift: „Die funksiebegrip en die grafische voorstelling": „Dit word nog versterk as hij merk dat die vergelijking $ax + b = 0$ soms 'n wortel het en dan weer geen wortel het nie; dat die vergelijking $ax^2 + bx + x = 0$ twee wortels, een wortel of geen wortel het nie."

NASCHRIFT. Dit artikel is in handschrift reeds gezonden aan de Heeren Schogt, Beth en Dijksterhuis, die zich met de strekking zeer goed konden vereenigen.

In drukproef is het gezonden aan de Inspecteurs van het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs en aan de andere medewerkers, op de omslag vermeld nl. aan de Heeren Gerrits, Haalmeijer, Thijsen (thans met verlof hier te lande), De Vaere en Verrijp.

In een volgende aflevering zullen eenige antwoorden worden afgedrukt; we kunnen alvast wel zeggen, dat „*i*" voor de tweede klas wel afgedaan zal hebben.

We wekken alle lezers van dit artikel op aan de redactie te berichten, hoe zij er tegenover staan, al of niet met redenen omkleed.

Gaarne wachten we deze berichten vóór 1 Dec. 1933.

HET WISKUNDE-ONDERWIJS IN HET INDISCHE ONDERWIJSSTELSEL

DOOR

Dr. W. P. THIJSEN en Dr. U. H. VAN WIJK.

Eenige statistische gegevens.

Het agglomeraat van volken en rassen, dat het eilandenrijk van Nederlandsch-Indië bevolkt, vindt zijn weerspiegeling in een zeer ingewikkeld onderwijsstelsel, dat in menig opzicht van het Nederlandsche afwijkt.

Men kan drie hoofdgroepen onderscheiden: het algemeen vormend, het vak- en het hooger onderwijs.

Het algemeen vormend onderwijs omvat: [1])

a) Voorbereidend lager onderwijs:
  fröbelscholen 56; 3403;
  voorklassen voor het Westersch lager onderwijs 257; 11344;

b) Inlandsch lager onderwijs:
  volksscholen (3-jarig) 16605; 1229666;
  vervolgscholen (2-jarig) 993; 97236;
  volledige tweede klasse-scholen of standaardscholen (5-jarig): 1991; 339594;

c) Westersch lager onderwijs:
  Europeesche lagere scholen 300; 44307;
  Hollandsch-Chineesche scholen 110; 21617;
  Hollandsch-Inlandsche scholen 292; 60910;
  speciale scholen 16; 3024;
  schakelscholen 58; 4803;

---

[1]) De cijfers zijn ontleend aan het in 1932 verschenen „Algemeen Veslag van het Onderwijs in Nederl. Indië over het schooljaar 1930/1931". Het eerste cijfer geeft het aantal scholen aan, het tweede het totaal aantal leerlingen. Het bizonder onderwijs is bij de cijfers inbegrepen.

(de sub *b.* genoemde scholen leveren de leerlingen voor de schakelscholen).

d) Voortgezet lager- en middelbaar onderwijs:
M.U.L.O.-scholen 64; 11788;
H.B.-scholen III 7; 733;
H.B.-scholen V 7; 2743;
A(lgemeene) M(iddelbare) scholen 9; 1051;
Lycea 2; 459.

Het zou te ver voeren, wanneer wij hier ook het vakonderwijs uitvoerig zouden behandelen. We noemen slechts de opleiding van onderwijzers(essen), medisch personeel; voor den land- en boschbouw en de veeteelt; handelsonderwijs; opleiding voor bestuurs- en administratieve functies, voor de zeevaart, de marine en de landmacht en het nijverheidsonderwijs.

Het hooger onderwijs omvat de volgende hoogescholen, waarbij de getallen het totaal aantal ingeschreven studenten gedurende den cursus 1930—1931 aangeven:

Technische hoogeschool: 109;
Rechtshoogeschool: 221;
Geneeskundige hoogeschool: 199.

Van de voor het eerst ingeschreven studenten had 32 % de H.B.S.V. en 63 % de A.M.S. doorloopen.

Tot deze behoorden:

	Eur.	Inl.	vr. Oosterl.
Techn. hoogeschool	57 %	34 %	9 %
Rechts „	42 %	40 %	18 %
Geneesk. „	10 %	59 %	31 %

Inleidende beschouwingen:

Dat onze onderwijstaak in deze gewesten nog lang niet ten einde is, blijkt wel hieruit, dat bij een zielental van 60 millioen ongeveer 90 % nog analphabeet is. Het accres van het aantal leerlingen der volksscholen kon echter de laatste jaren niet onbevredigend genoemd worden.

Zoo was volgens 't laatste onderwijsverslag het aantal leerlingen met 141.274 (13 %) toegenomen, terwijl de toename van het aantal kinderen in den schoolgaanden leeftijd (6—9 jaar) op 67000 gesteld kon worden.

Hierbij heeft men nog te bedenken, dat velen dier kinderen aan één standaardschool of één school voor Westersch lager onderwijs opgeleid worden.

Volgens de Hollandsch-Inlandsche Onderwijscommissie bezoeken van 200 Inlandsche kinderen 60 een school, waarvan 3 Westersch lager onderwijs genieten.

In den cursus 1930—1931 bedroeg de toename van het aantal volksscholen 1090 (739 openbare, 5 gemeentelijke en 346 gesubsidieerde), van de volledige tweede-klassescholen 22; van de vervolgscholen 124 en van het westersch lager onderwijs 38 (19 openbare, 19 gesubsidieerde).

Een dergelijk enorm accres van het aantal scholen kan in dezen tijd van malaise natuurlijk niet volgehouden worden; de wereldcrisis heeft ook hier stagnatie en zelfs afbraak gebracht. We noemen slechts [1]) de recente opheffing van vele voorklassen (in totaal 246); de degradeering der H.I.-school, de zeer ingrijpende M.U.L.O.-contingenteering, de verhooging van het aantal leerlingen per klas, enz. [2])

De drang naar Westersch georienteerd onderwijs is van Inlandsche en vooral ook Chineesche zijde zeer groot. Voor eenigszins hoogere betrekkingen is voldoende kennis van het Nederlandsch een vereischte. Men vergete ook niet, dat de meeste Inlandsche talen vooralsnog in uitdrukkingsvermogen te kort schieten om zaken, die de moderne cultuur, speciaal de techniek, betreffen, goed en beknopt weer te geven. In de Maleische bladen treft men daarom in den tekst aanhoudend Nederlandsche en andere vreemde woorden aan, die slechts door lange omschrijvingen zouden vervangen kunnen worden.

De voertaal is bij het voortgezet lager- en middelbaar onderwijs van het hoogste belang. Men moet niet vergeten, dat geringe kennis van Nederlandsch van hen, voor wie deze taal een vreemde is, de vorderingen in alle vakken nadeelig moet beinvloeden. Vandaar dat

---

[1]) Voor nadere bizonderheden zie men: „De Ind. Gids", Febr. 1933 E. C. van den Ende. De Indische Onderwijsbegrooting naar de Staten Generaal II.

[2]) Bij gouvernementsbesluit van 22 April '33 is een adviescommissie voor onderwijshervorming ingesteld (eind Juni geïnstalleerd). Zoowel de samenstelling als de taakomschrijving der Commissie doen uitkomen, dat het financiele vraagstuk, m.a.w. bezuiniging haar hoofdtaak is.

bij het toelatingsexamen tot de H.B.S. een onvoldoend cijfer voor Nederlandsch afwijzing meebrengt, al zouden ook alle andere cijfers uitmuntend zijn. Dat dit van alle leerlingen geeischt wordt, is niet alleen een eisch van billijkheid; ook in vele Europeesche milieu's wordt nl. vaak een Nederlandsch gesproken, dat zelfs aan bescheiden eischen niet voldoet, hoewel de toestanden in dit opzicht verbeteren. Door de stichting van het Indo-Europeesch Verbond o.a. is het klassebewustzijn van de Indo-Europeanen — de betrekkelijk talrijke groep, staande tusschen Inlanders en Europeanen — zeer gunstig beinvloed met als gevolg het streven om het Nederlandsch zuiverder te spreken.

Bezwaren van klimatologischen aard doen zich op allerlei wijze bij het Indische onderwijs gelden. Vooreerst in de dagindeeling, waardoor alle lessen, slechts afgebroken door korte pauzes, vóór den middag moeten worden gegeven. Het is daarbij onvermijdelijk, dat het onderricht in de laatste schooluren door vermoeienis en de drukkende hitte (niet alleen in de kustplaatsen) minder tot zijn recht komt.

De energie van docenten en leerlingen wordt door het afmattende klimaat ongunstig beinvloed. Vele leerlingen zijn bovendien door tropische ziekten als malaria, dysenterie e.d. ondermijnd, terwijl het klimaat ook een niet steeds gunstigen invloed op de puberteit schijnt uit te oefenen. [1])

Nog op één kwestie moeten we de aandacht vestigen. Het schooljaar begint in Indië twee maanden vroeger dan in Nederland, nl. in Juli. Men heeft meerdere malen getracht dit tijdsverschil te verkleinen, maar dat stuitte steeds af op klimatologische bezwaren, vooral in Oost-Java. De Dienst der Volksgezondheid heeft zich daartegen onder aanvoering van zwaarwegende argumenten steeds verzet. Het is b.v. in Soerabaia nagenoeg ondoenlijk om in den warmsten tijd (half October tot half November) vruchtdragend onderwijs te geven, zoodat de najaarsvacantie (voor de middelbare scholen 3 weken) welhaast noodzakelijk in dien tijd moet vallen. De groote, najaars- en Kerstvacantie zouden dan te vlug op elkaar volgen. [2])

---

[1]) „De resultaten van het Onderwijs in de eerste vier studiejaren aan de Gouv. H.B.S. met 5-j. c. te Bandoeng" (blz. 44—45) van Dr. Ir. W. F. Gisolf.

[2]) Dit was reeds geschreven, toen het besluit kwam, om in 1934 den cursus 1 Augustus te doen beginnen. De afdeeling Soerabaja van

Deze inleiding was noodig om althans eenigszins te doen inzien, dat de samenstelling der klassen bij het voortgezet lager en middelbaar onderwijs in Indië een geheel andere is dan in Nederland, terwijl de leeftijd, de vooropleiding der leerlingen en de milieu's, waaruit zij voortkomen en waarin zij hun huiswerk moeten maken, geweldig uiteenloopen.

Algemeen vormend voortgezet onderwijs.

Aan het eind van het schooljaar 1930/1931 werd dit onderwijs gevolgd door de volgende aantallen leerlingen:

	Europeanen	Inlanders	Vreemde Oosterl. in hoofdz. Chin.
Scholen v. M.U.L.O. (incl. voorklassen)	3458 (29½ %)	6906 (58½ %)	1424 (12 %)
H.B.S. III	630 (86 %)	34 (4½ %)	69 (9½ %)
H.B.S. V	2296 (84 %)	171 (6 %)	276 (10 %)
A.M.S.	165 (16 %)	649 (62 %)	237 (22 %)
Lycea	445 (97 %)	8 (1²/₃ %)	6 (1¹/₃ %)

Vele leerlingen dezer scholen zijn niet bij hun ouders of voogden in huis, maar ondergebracht bij particulieren of in internaten, zooals de Jan Pieterszoon Coenstichting in Batavia, het Bandoengsch Internaat, enz. Dit houdt natuurlijk verband met het feit, dat het aantal scholen voor voortgezet onderwijs zoo gering is in vergelijking tot de uitgestrektheid van den Archipel. Aan de scholen zijn in het algemeen geen internaten verbonden; een uitzondering vormen de scholen der Carpentier-Alting-Stichting te Batavia, waaraan een meisjesinternaat annex is. De Gouvernements H.B.S. met 5-jarigen cursus te Batavia (de Koning Willem III School) heeft in het begin van haar bestaan ook een deel der leerlingen binnen haar muren gehuisvest.

De gemiddelde leeftijd der leerlingen is hooger dan in Nederland. De lagere school telt zeven leerjaren, terwijl het uitzondering is, dat een leerling na de 6e klasse te hebben doorloopen, toelatingsexamen tot de H.B.S. doet. 54 % der leerlingen van de 1e klassen van het M.U.L.O. is 16 jaar of ouder. Ook verliezen de

---

de „Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschap in N. Indië" heeft intusschen ontraden, de najaarsvacantie van 4 weken te bekorten en wel op medische gronden.

Europeesche leerlingen vaak een jaar door overplaatsingen hunner ouders en door verloven naar Europa (men denke aan het reeds besproken verschil in aanvang en einde van den cursus).

De H.B.S. met 5-jarigen cursus.

Concordantie met Nederland.

Daar de H.B.S. V een trekkersschool is, kunnen we over het wiskunde-programma kort zijn. De concordantie eischt, dat elke wijziging van het Nederlandsche programma onmiddellijk door de Indische scholen wordt overgenomen.

Men zou misschien geneigd zijn te meenen, dat er toch wel eenige verschilpunten moeten zijn, daar de „Nieuwe Schoolalgebra" van Beth en Wijdenes kort geleden speciaal voor Indische scholen bewerkt is door Van Loo. Deze bewerking beoogt echter slechts een bevattelijker maken van de taal, terwijl eenige onderwerpen zijn geschrapt, die niet tot het programma der H.B.S. behooren.

Toelatingsexamen.

De toelating tot de school geschiedt volgens een star systeem. De directeur ontvangt van de leeraren de voor het schriftelijk en c.q. monderling examen toegekende cijfers, vergelijkt deze met de verklaring van het hoofd der school en leidt daaruit af, tot welk van de door het departement van Onderwijs en Eeredienst opgestelde serie „gevallen" de candidaat behoort. Automatisch (dus zonder dat een leeraarsvergadering er in gekend wordt) volgt daar dan uit, of de candidaat al of niet toegelaten is.

Leerboeken.

Wat de leerboeken betreft, zijn we hier sinds een 5-tal jaren gezegend met een algemeene boekenlijst, waarin elk jaar wijzigingen aangebracht kunnen worden met dien verstande, dat een op de lijst geplaatst boek eerst na 3 jaren daarvan verwijderd mag worden. Bij elke voorgestelde wijziging blijkt duidelijk, dat van een uniform inzicht van de leeraren over de te gebruiken boeken geen sprake is. Dit stempelt zoo'n lijst tot een onding, waar we liefst zoo spoedig mogelijk van verlost moeten worden. Het gevolg is, dat er weer leeraren aan het dicteeren geslagen zijn, omdat zij het voorgeschreven boek minder gewenscht achten. Aan een enkelen

docent is zelfs al toegestaan een door hem zelf geschreven boek te gebruiken in plaats van het op de lijst voorkomende.

Bij een onderzoek naar het aantal leerlingen, dat bij overplaatsing van de eene school naar de andere financieel voordeel trekt van die uniformiteit, bleek, dat dit aantal slechts luttele procenten (wij meenen 2 %) bedraagt.

Ook elders is men weinig over het gebruik van dezelfde leerboeken op alle scholen te spreken. Lietzmann [1]) rapporteert daarover o.m.:

„In Japan hat man mit dem State-text-book-system sehr „schlechte Erfahrungen gemacht; der Betrieb des mathematischen Unterrichtes ist geradezu eingerostet; einsichtige Kreise „sind froh, dasz man sich allmählich von dem alten System frei „zu machen beginnt. Auch die Erfahrungen in einigen Amerika-„nischen Staaten sind dem Gedanken keineswegs günstig."

Leerkrachten.

De docenten der Indische middelbare gouvernementsscholen (H.B.S., A.M.S., kweekscholen en technische scholen) vormen één groot corps en kunnen, zonder dat zij daartoe een verzoek hebben ingediend, naar een andere onderwijsinrichting overgeplaatst worden. De scholen staan daardoor minder los van elkaar dan in Nederland. Ook kunnen den leeraren lessen worden opgedragen aan andere gouvernements- en bijzondere scholen, als ze geen volledige taak hebben aan de school, waaraan ze officieel verbonden zijn.

T.a.v. de docenten is in het onderwijsverslag over het schooljaar 1930—1931 vermeld: „De Nederlandsche H.B.S. maakt dus in „dubbel zoo groote mate van universitair opgeleide krachten ge-„bruik als de Indische. Voorts trekt het de aandacht, dat in Indië „meer gebruik wordt gemaakt van de diensten van ingenieurs en „officieren."

Hierin kan wellicht een wijziging komen, als ook in Indië aan de universitair opgeleiden zooveel fictieve dienstjaren worden toegekend, dat daardoor hun bezoldiging minder zal achterstaan bij die van de leeraren met m.o. akte van denzelfden leeftijd. Toch zal het percentage academisch gevormden hier altijd wel geringer

---

[1]) Methodik des mathematischen Unterrichts. Bd. I, blz. 303—304.

blijven dan in Nederland, omdat men in de tropen het wetenschappelijk milieu (bibliotheken etc.) mist. Ter beschikking van de mathematici staat de bibliotheek van de Technische Hoogeschool te Bandoeng, die, dank zij de zorgen van Prof. Boomstra, op wiskundig gebied betrekkelijk goed voorzien is.

Rapportcijfers.

Wij vestigen de aandacht op het voor de H.B.Scholen in Indië sedert kort geldend voorschrift, waarbij de leeraren verplicht zijn hun onvoldoende cijfers tegenover het Departement te „verantwoorden", indien dit aantal in een bepaalde klas de 25 % overschrijdt. „De moderne talen en de exacte vakken worden daarbij over één kam geschoren met andere vakken, waarbij het percentage onvoldoenden gewoonlijk veel kleiner is. Wij willen over dien maatregel geen oordeel uitspreken, wijzen er slechts op, dat de eischen, welke de docenten stellen, er wel eens door beinvloed kunnen worden en, naar insiders bekend is, ook inderdaad worden.

Afgescheiden van dezen maatregel is er trouwens over de geheele linie een streven merkbaar om de cijfers op te drijven, mede dank zij de belangstelling van de ouders in dat cijfermateriaal (wat nog geen belangstelling in het onderwijs waarborgt) [1]. Het logisch gevolg hiervan is een waardevermindering van het einddiploma. De recente aanval van eenige universiteiten op de H.B.scholen heeft dan ook bij de Indische docenten geen verwondering gebaard. Ook de Indische hoogleeraren zouden graag de poorten der hoogescholen slechts open willen stellen voor hen, die niet alleen een einddiploma H.B.S. of A.M.S. kunnen overleggen, maar daarnaast

---

[1]) „Helaas moeten er, naar geconstateerd wordt, ook hoofden van „onderwijsinrichtingen zijn, wien het in de eerste plaats gaat om het „slagen van de candidaten. Onder allerlei namen en voorwendselen „wordt, naar men betoogt, een zachte, maar onophoudelijke en daar-„door fataal werkende druk uitgeoefend door vele ouders en enkele „directeuren, om mee te gaan met den tijd, om overboord te gooien, „wat moeilijk is, wat inspanning vereischt; een druk, waaraan „niemand geheel kan ontkomen, wanneer die onafgebroken werkt. „Sinds enkele weken is gelukkig nieuwe steun gevonden voor degenen, „die hun onderwijs op hoog peil wenschen te handhaven, en wel „in een adres van enkele hoogleeraren aan den Minister van Onder-„wijs. Misschien dat de drijvers naar vergemakkelijking, de predikers „van „spaar de kinderen", daardoor tot bezinning komen, dat zij „gaan inzien, hoe fataal hun druk, hun ondermijning is."
(„De Preangerbode" van 10 Mei 1933; overgenomen uit „Het M.O. in Ned. Indië.")

van hun geschiktheid voor het volgen van hooger onderwijs op een door de hoogescholen af te nemen examen voldoende blijk geven.

Prof. Boomstra was zoo vriendelijk ons eenige gegevens op dit punt te verstrekken betreffende de wiskunde, die aan de T.H. te Bandoeng alleen in het eerste jaar gedoceerd wordt. Aan die inrichting is het gebruik de studenten in den loop van het jaar verschillende malen schriftelijk werk te laten maken.

Ieder jaar zijn er wel eenige jongelui, die geregeld het verstrekte papier nagenoeg blanco inleveren. Aan het einde van den cursus moet dan ook een flinke schifting plaats hebben, die veel beter een jaar tevoren zou kunnen geschieden.

Bij de beroemde Ecole Polytechnique te Parijs heeft een dergelijke strenge selectie plaats, wat het onderwijs niet weinig ten goede komt. In de inleiding van het groote werk „Le Livre du Centenaire de l'Ecole Polytechnique (1794—1894)" lezen we daaromtrent op blz. L de volgende uitspraak van Wantzel:

„Souvenez-vous, me dit-il, qu'il importe pour le bien et „l'honneur de l'Ecole, plus encore d'écarter les mauvais que „d'admettre les bons." Ce mot d'un homme juste et bon entre „tous me parut dur et paradoxal. L'expérience m'a appris qu'il „était sage et profond.."

Höfler formuleert dit kort en krachtig op blz. 39/40 van zijn „Didaktik des mathematischen Unterrichts" a.v.:

„Eine leichte Schule ist ein soziales Verbrechen".

Grootte der scholen.

De scholen in Indië zijn abnormaal groot. Bandoeng b.v. telt ruim 800 leerlingen. De Directeur is te Semarang en Malang tevens leider der A.M.S. Dergelijke inrichtingen stellen hooge eischen aan het organisatievermogen, de werkkracht en den takt harer leiders. Het groote aantal leerlingen maakt, dat de klassen in den regel een bezetting hebben, die het maximum (30) zeer nabij komt en een enkele maal zelfs overschrijdt, terwijl aan vrijwel alle docenten ± 30 lessen per week zijn opgedragen. Aan hen worden dus ook zware eischen gesteld, zwaarder dan aan den gemiddelden leeraar in Nederland en dat onder klimatologische omstandigheden, die verre van stimuleerend op hun energie werken.

Uniformiteit der beoordeeling.

Het is natuurlijk gewenscht om bij een groot aantal parallelklassen het onderwijs ook zoo veel mogelijk parallel te doen verloopen. Daartoe verdient het aanbeveling, dat de docenten in de parallelafdeelingen voor hetzelfde vak geregeld contact met elkaar houden. Aan sommige scholen wordt eens per jaar in iedere klas voor elk vak algemeen proefwerk opgegeven, waarvan de bedoeling is te komen tot een uniforme beoordeeling van de resultaten, doch waarvan de leerlingen wel eens beweren, dat het een contrôle is van den directeur op de leeraren. (Als een dergelijke contrôle noodig is, moet ze n.o.m. plaats hebben zonder dat de leerlingen er in betrokken worden). Wij zullen ons echter aan de officieele lezing houden en zijn van opinie, dat ook al bereikt men die uniformiteit bij een enkel in gezamenlijk overleg opgesteld werk, die eenvormigheid bij een volgende gelegenheid toch weer zoek kan zijn, zoowel t.a.v. de beoordeeling als de te stellen eischen. Men kan nu eenmaal verschillende docenten niet in eenzelfde keurslijf persen. Een grooter bezwaar achten we intusschen de enorme taakverzwaring, die een vier- of vijfvoudige correctie meebrengt.

Voor de uniformiteit in de beoordeeling laat de schoolleiding gewoonlijk de wiskunde in de vijfde klassen (en soms ook in de 4de) in één hand. Telt zoo'n groote school 5 à 6 volledig bevoegde wiskunde-docenten, dan krijgt men heel weinig ervaring van het onderwijs in den bovenbouw.

Crisismaatregelen.

Er zou dus alles voor te zeggen zijn om de Indische H.B.scholen met 5-jarigen cursus elk in twee inrichtingen te splitsen. Dit zou het onderwijs zeker ten goede komen en een betere aansluiting met de Hollandsche scholen tot gevolg hebben. In dezen tijd van bezuiniging denkt men daar echter niet aan. Crisismaatregelen, die het onderwijs belangrijke schade berokkenen, zijn aan de orde van den dag. De leeraren worden op het oogenblik 30 à 35 % lager bezoldigd dan een jaar of vier geleden. Volledig bevoegde leerkrachten wordt niet meer uitgezonden. In de plaats daarvan tracht men de vacatures te doen vervullen door wachtgelders van andere takken van gouvernementsdienst, die soms minder geschikt blijken te zijn voor het hun opgedragen werk. Dergelijke maatregelen, die alle

tezamen het onderwijspeil drukken, moesten vermeden worden. Het M.O. hier te lande, dat een twintigtal jaren geleden voor ongeveer de helft in handen was van onderwijzers, in 't bezit van lagere acten, heeft zich juist in de jaren na den oorlog opgewerkt tot een niveau, dat de vergelijking met Nederland in alle opzichten kan doorstaan, al zal men in Indië altijd gehandicapt zijn door het klimaat en last hebben met de talen. Een klasse van een Indische H.B.S. telt nl. vogels van diverse pluimage. Naast volbloed-Europeesche leerlingen treft men er Indo-Europeesche, Chineesche, Indo-Chineesche en leerlingen van allerlei Inheemsche rassen aan. Van deze komen echter alleen de beste op de H.B.S., zoodat het onderwijs in de talen van de aanwezigheid van dergelijke leerlingen niet dien nadeeligen invloed ondervindt, dien men er op het eerste gezicht van zou verwachten. Het onderwijs in de exacte vakken aan zoo'n gemengd publiek levert geen extra bezwaren op. Wel doen zich daarbij bezwaren voor op scholen, waar op het punt van taalbeheersching minder zware eischen gesteld worden.

Een andere crisismaatregel, die kort geleden genomen is, beoogt de mogelijkheid om leerlingen, wier ijver, gedrag en kennis een belangrijk tekort vertoont, tijdig van de school te kunnen verwijderen. Zij, die b.v. de eerste klas gedoubleerd hebben en aan het eind van de tweede klas wederom afgewezen worden, worden verwijderd. Bij gebrek aan ijver wordt slechts tot verwijdering besloten, indien 2/3 der klasseleeraren zich daarvoor uitspreekt. Het moet ook geenszins uitgesloten worden geacht, dat in de toekomst contigenteeringsmaatregelen bij de toelating zullen worden toegepast zooals thans reeds bij de scholen voor M.U.L.O. geschiedt. Dergelijke maatregelen zijn vooral voor kinderen van Europeeschen huize minder aangenaam. De mogelijkheid om langs anderen weg dan de middelbare school een passende positie in de maatschappij te bereiken is hier lang zoo groot niet als in Europa door het beperkte aantal vakscholen. Europeanen zenden hun kinderen ook liefst niet naar de scholen voor M.U.L.O., waar de van huis uit correct Nederlandsch sprekende leerlingen verre in de minderheid zijn.

Differentiatie in den bovenbouw.

De differentiatie in den bovenbouw der H.B.S. bestaat in Indië practisch niet meer. De A-afdeelingen, waar de leerlingen, die voor de exacte vakken minder begaafdheid bezitten, hun studie

zonder overmatige inspanning ten einde konden brengen, zijn aan alle H.B.scholen met 5-jarigen cursus uit bezuinigingsoverwegingen opgeheven. Alleen aan de 3-jarige H.B.S. te Batavia (De Prins Hendrik School) is nog een dergelijke afdeeling verbonden. Door de groote afstanden zijn leerlingen buiten Batavia dus practisch verstoken van de gelegenheid de literair-economische studie te volgen.

Scholen voor M.U.L.O. en A.M.Scholen.

Voorklassen en Differentiatiescholen voor M.U.L.O.

Aan de 3-jarige scholen voor M.U.L.O. zijn voorklassen verbonden, die bevolkt worden door een deel (40 à 50 %) van de leerlingen, die van de Holl. Inl. (Chin.) school, speciale school en schakelschool afkomstig zijn. Na het doorloopen van de 1e klasse is de opleiding gedifferentieerd. De A-afdeeling geeft eindonderwijs, de B-afdeeling onderwijs, dat, wanneer het met vrucht doorloopen is, toegang geeft tot de A.M.S. Aan het eind van het eerste jaar wordt door de school een advies omtrent de leerlingen uitgebracht. Vele leerlingen echter, „aan wie hoogere studie wordt afgeraden en aan wie derhalve den raad wordt gegeven de A-afdeeling te bezoeken, prefereeren niettemin de B-afdeeling. Het omgekeerde, nl. dat een leerling ondanks advies ten gunste van de B-afdeeling plaats neemt in de A-afdeeling, komt zelden voor" . . . . terwijl aan de openbare scholen 38 % van de leerlingen ondanks advies de B-afdeeling koos, was dit bij de bijzondere scholen slechts met 22 % van de leerlingen het geval" (Onderwijs verslag 1930/1931 blz. XLV).

In het inspectie-verslag wordt dan ook opgemerkt:

. . . . . „de ervaring leert echter, dat steeds nog tal van leer-„lingen in de B-afdeeling zitten, die niet in staat zijn het daar „gegeven onderwijs behoorlijk te verwerken, en het streven dient „er op gericht te zijn den toeloop tot de A-afdeeling door het „geven van bindende adviezen e.d.m. meer te bevorderen dan tot „nu toe geschied is" (Onderwijsverslag blz. 32/33).

Van de moderne talen is slechts het Engelsch verplicht leervak. Fransch en Duitsch worden facultatief aan de B.-afd. gedoceerd. T.a.v. de A.-afd. wordt in het Inspectieverslag nog opgemerkt:

„Daarbij ligt het niet in het voornemen aan de A-afdeeling het karakter van algemeen vormend onderwijs te ontnemen en er een lagere handelsschool van te maken."

Contingenteering.

Bij besluit van 12 April 1932 is uit bezuinigingsoverwegingen tot contingenteering van het aantal leerlingen bij het M.U.L.O. overgegaan.

Dit is geen halve maatregel geweest: het totaal aantal klassen is van 277 op 177 teruggebracht. (later zijn er nog weer 10 bijgevoegd).

Overgang naar de H.B.S. V.

Mulo-abituriënten, in het bezit van het diploma B, kunnen tot de 4de klasse der H.B.S. als toehoorder in alle vakken worden toegelaten, mits:

a) zij een verklaring kunnen overleggen van den Mulo-directeur, waaruit blijkt, dat zij geschikt worden geacht voor het onderwijs aan den bovenbouw van de H.B.S.

b) uit het diploma blijkt, dat ook examen in het Fransch en Duitsch is afgelegd.

c) op het mulo-eindexamen door hen, die de literair-economische afdeeling der H.B.S. wenschen te bezoeken, minstens een 6 voor de vakken Nederlandsch en Engelsch en door hen, die toelating vragen tot de 4de klasse der afdeeling B minstens een 6 voor de vakken Nederlandsch, Algebra en Meetkunde is behaald.

d) een examen in de vakken Goniometrie en Natuurkunde is afgenomen door leeraren der H.B.S.

Wiskunde-docenten.

Vele wiskunde-docenten aan de scholen voor M.U.L.O., kweekscholen en technische scholen hebben hun mathematische opleiding in Indië genoten. Naast verschillende particuliere schriftelijke en mondelinge cursussen voor de lagere akte bestond er tot 1929 een door het Gouvernement ingestelde cursus tot opleiding voor de lagere acte te Djokjakarta.

Te Bandoeng bestaat een tweejarige opleiding voor de akte K I, die verbonden is aan de T.H. en onder leiding staat van Prof. Dr. Boomstra. Om de twee jaar wordt een nieuwe cursus

begonnen. De examens geschieden niet ten overstaan van de faculteit der technische wetenschap, maar van eén commissie, die door den Directeur van Onderwijs en Eeredienst benoemd wordt.

De A.M.S.

De A.M.S. is een specifiek Indische school. Ze is gesplitst in een literaire (A) en een wis- en natuurkundige (B) afdeeling. De eerste is nog weer onderverdeeld in een Oostersch letterkundige (A I) en een Westersch klassieke (A II) afdeeling. De afgestudeerden voltooien voor het meerendeel hun studie in Indië, ofschoon er ook verschillenden in Europa verder opgeleid worden. De A.M.S. is een driejarige kopschool op de scholen voor M.U.L.O. Ouders, die niet in de buurt van een H.B.S. wonen, kunnen hun kinderen langs den weg der A.M.S. toch een volledige middelbare opleiding geven zonder genoodzaakt te zijn ze reeds op hun 12de of 13de jaar elders in den kost te doen.

De eerste van deze soort scholen is in 1919 te Djokja geopend. De A.M.S. te Medan heeft niet aan de verwachtingen beantwoord, omdat de leerlingen van de Sumatraansche scholen voor M.U.L.O. er de voorkeur aan geven een A.M.S. op Java te bezoeken. Van de 1051 arbituriënten volgden in het cursusjaar 1930—1931 slechts 191 de A-afdeeling.

Bij Gouv.besluit van 14 Juni 1931 (Staatsblad No. 249) kwam een reglement tot stand ter vervanging van de voorloopige voorschriften. Daarbij werd het Duitsch als verplicht leervak ingevoerd, ook voor de afdeelingen A I en A II. Voordien waren, evenals op de scholen voor M.U.L.O., Fransch en Duitsch op de B-afdeeling en Duitsch op de A-afdeeling facultatieve vakken. Toen deed zich bij sommige studenten het wel zeer ontstellende verschijnsel voor, dat zij de hoogeschool betraden zonder de geringste kennis van die talen. Aan de Rechtshoogeschool te Batavia zijn daarom meerdere jaren cursussen in de beginselen van Fransch en Duitsch (en ook Latijn) aan eerstejaarsstudenten gegeven. Het behoeft geen betoog, dat dit een lapmiddel was en dat dergelijke studenten nu niet bepaald als volwaardig konden worden beschouwd.

Aan het einddiploma der B-afdeeling zijn dezelfde rechten verbonden als aan het einddiploma H.B.S. V B.

Voor de vakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde, mechanica, teekenen en boekhouden heeft men gedurende een paar jaar dezelfde

eindexamenopgaven gesteld als bij het eindexamen H.B.S. en wel uit overweging, dat het niet wenschelijk is de A.M.S. geheel los te maken van de H.B.S. en daarmee van het onderwijspeil in Nederland. Op de A.M.S. B worden echter andere leerboeken gebruikt dan aan de H.B.S.scholen, terwijl thans ook weer afzonderlijke eindexamenopgaven worden opgegeven.

Sedert kort (Kon. Besluit van 11 April 1930) zijn de abituriënten van de A.M.S. A II vrijgesteld van het Staatsexamen en kunnen zij, na ten overstaan van de betrokken faculteit afgelegd suppletie-examen in Grieksch alle studierichtingen der Universiteit volgen.

Lycea.

In het cursusjaar 1930—1931 volgden in den bovenbouw der beide pas kort bestaande (particuliere) Indische Lycea 104 leerlingen de H.B.S.-afdeeling en 73 de gymnasium-afdeeling. Van de leerlingen in de hoogste twee klassen van de gymnasium-afdeelingen volgden 12 het A-programma en 14 het B-programma. De afgestudeerden genieten dezelfde rechten als de abituriënten van overeenkomstige scholen in Nederland, dank zij de concordantie in de programma's.

H.B.S. III.

De H.B.scholen met 3-jarigen cursus hebben geen uniform programma, dat rechtstreeks aansluit bij de 4e klasse van de 5-jarige H.B.S. Zij dienen evenals de M.U.L.O. B-afd. tot onderbouw van de Europeesche kweekscholen, omdat het leeuwendeel der afgestudeerden aan die inrichtingen hun studie voortzetten. De 3-jarige H.B.S. der Prins Hendrik School te Batavia levert ook veel leerlingen aan den bovenbouw dier school (Handelsschool) af.

In tegengestelling met de H.B.scholen met 5-jarigen cursus tellen de driejarige scholen slechts weinig leerlingen.

Vakonderwijs.

Wat het vakonderwijs betreft, zullen we ons beperken tot twee schooltypen, de technische scholen en de kweekscholen.

T e c h n i s c h e s c h o l e n.

Aan het einde van het schooljaar 1930/1931 werd het onderwijs aan de 4 openbare technische scholen met 4-jarigen cursus gevolgd door de volgende aantallen leerlingen:

Europeanen	Inlanders	Vreemde Oosterlingen
630 (49%)	512 (40%)	142 (11%) [1]

Bij de bijzondere technische school met 4-jarigen cursus te Semarang bedroegen deze aantallen:

116 (72%)	25 (15½ %)	20 (12½ %)

Van de leerlingen volgde bijna 80 % de werktuigkundige afdeeling; in 1925 bedroeg dit percentage 65, in 1921 31 %.

De scholen houden het midden tusschen ambachtsscholen en Nederlandsche middelbaar technische scholen.

Men heeft de eerste dezer scholen ± 30 jaar geleden in het leven geroepen naar het voorbeeld van Fransche inrichtingen, die voor de techniek opleiden. De afgestudeerden vinden emplooi als onderopzichter bij den waterstaat, spoorwegen, waterkracht en electriciteit, mijnbouw en olie-ontginning [2] en als machinist op suikerfabrieken en bij de spoorwegen. Zij vormen de schakel tusschen de ingenieurs en architecten eenerzijds en de Inheemsche werkkrachten anderzijds. Voor de belangrijker middelbaar technische posities is men ook hier te lande aangewezen op de middelbare technici uit Nederland. Eenige jaren geleden zijn nog pogingen aangewend om ook hier een M.T.S. van het Nederlandsche type in het leven te roepen, doch de groote werkgevers prefereeren in Nederland opgeleide krachten.

Sedert 1932 is de cursusduur verhoogd tot 5 jaar. De bovenbouw der werktuigkundige afdeeling is gesplitst in een cursus voor werktuigkunde en één voor electrotechniek, die der bouwkundige afdeeling in een cursus voor burgerlijke bouwkunde en één voor water- en spoorwegbouwkunde. De leerlingen zijn afkomstig van allerlei soorten lagere scholen op Westerschen grondslag.

Het wiskunde-programma omvat zoo ongeveer de leerstof van een school voor M.U.L.O., welke voor den bovenbouw wordt aangevuld met de trigonometrie van recht- en scheefhoekigen driehoek. De beschrijvende meetkunde wordt reeds in den onderbouw in de teekenles behandeld als projectie-teekenen.

De beheersching van het Nederlandsch laat aan de technische scholen te wenschen over. Dit beinvloedt ook het onderwijs in

---

[1] Ult.o 1926 bedroegen deze percentages: 66½ %, 25½ % en 8 %.

[2] Aan de technische school te Batavia was nl. tot voor kort een mijnbouwkundige cursus verbonden.

wiskunde aan deze inrichtingen. Een eenigszins uitgebreid meetkunde-vraagstuk kunnen de jongens taalkundig niet verwerken. Licht men de opgave echter met een figuur toe, dan wordt ze hun dikwijls duidelijk en levert de oplossing geen extra moeilijkheden meer op. Wel wordt de oplossing dan nog in onbeholpen en duistere bewoordingen op papier gezet, maar na eenige oefening leert de docent dat taaltje wel ontcijferen.

Wiskunde hulpwetenschap.

De wiskunde is aan deze vakscholen uitsluitend hulpwetenschap voor de physica en de technische vakken. Dat is logisch, maar het kan niet door den beugel, dat er bij leerkrachten aan scholen voor algemeen vormend onderwijs het wanbegrip bestaat, dat op die scholen aan de wiskunde ook slechts de taak van hulpwetenschap is toegewezen. Misschien geschiedt dit uit onkunde of is het een uiting van de „Mathematikfeindlichkeit" bij vele ontwikkelde menschen, dat zelfs beoefenaren van andere exacte vakken een dergelijke opvatting durven te verkondigen. [1]) Auerbach heeft op dit verschijnsel reeds het licht laten vallen in zijn bekend werkje: „Die Furcht vor der Mathematik und ihre Uberwindung". Op blz. 12 daarvan lezen we:

„Das zweite Miszverständnis besteht in der Verweisung der „Mathematik in den Rahmen der materiellen Welt, also in ihrer „Charakterisierung als eine Naturwissenschaft, oder gar als ihre „(und der Technik) Hilfswissenschaft, womit zugleich gesagt „sein soll, dasz die Mathematik mit den Geisteswissenschaften „nichts zu tun habe."

In 1899 formuleerde de „Rheinische Direktoren Versammlung" het doel van het wiskunde-onderwijs op scholen, die niet voor een bepaald vak opleiden, zeer goed in de volgende bewoordingen:

„Die Mathematik hat als Unterrichtsgegenstand ihre eigenen „Ziele zu verfolgen und darf nicht lediglich zur Dienerin eines „anderen Unterrichtszweiges gemacht werden. Bei der Auswahl „der Aufgaben jedoch sind die verwandten Fächer zum Zwecke „der Konzentration des Unterrichtes heranzuziehen und die „Fortschritte in Wissenschaft, Technik und Industrie soweit „zu berücksichtigen, als sie dem Auffassungsvermögen der „Schüler zugänglich sind."

---

[1]) Dit is eenige malen in de Indische onderwijsbladen geschied.

Men komt in die publicaties, waarin aan de wiskunde slechts de rol van hulpwetenschap wordt toebedeeld, ook meermalen aandragen met uitspraken als: „wo das Rechnen anfängt, hört das Denken auf," en maakt daarbij de bekende fout („das erste Miszverständnis" van Auerbach) wiskunde met rekenen te verwarren. Groote mathematici zijn soms matige rekenaars, terwijl rekenkunstenaars meestal geen „Ahnung" van wiskunde hebben. Kinderen, die op de lagere school vlot rekenen met trucjes en regeltjes, alle standaardsommen kunnen oplossen, blijken dikwijls op de middelbare school last met wiskunde te hebben.

Eindexamen.

Bij de technische scholen wordt een schooleindexamen afgenomen zonder gecommitteerden. We vermelden dit speciaal, omdat de kwestie schoolexamen-staatsexamen bij de kweekscholen (zie de volgende pagina's) voorwerp van een uitvoerige gedachtenwisseling is geweest.

Kweekscholen Differentiatie.

Over deze scholen is in 1927 een uitvoerig „Advies van den Onderwijsraad inzake de reorganisatie van de opleiding van het personeel bij het Westersch Lager Onderwijs (kweekschoolplan)" verschenen.

De 3 typen van scholen voor W.L.O. (Eur. school, H.I.S. en H.C.S.) hebben er toe geleid een gedifferentieerde opleiding van het personeel dier scholen in het leven te roepen. Men heeft hier te lande Europeesche, Hollandsch-Inlandsche en Hollandsch-Chineesche kweekscholen. Het reeds meermalen aangehaalde onderwijsverslag bevat daaromtrent de volgende cijfers:

Eur. Kweekscholen	552	leerlingen
H.I.K.	1080	„
H.C.K.	145	„
scholen en cursussen hoofdacte	352	„

De Eur. kweekschool met 3-jarigen cursus heeft tot onderbouw de school voor M.U.L.O. (B) en de H.B.S. (III). De docenten hebben daarom allen een middelbare bevoegdheid. Het onderwijs is nog grootendeels algemeen vormend en bereikt het peil van den bovenbouw der A.M.S. T.a.v. de wiskunde worden echter, zooals het achter dit artikel afgedrukte examen-programma voor

dat vak aangeeft, heel wat minder zware eischen gesteld dan aan de A.M.S. Men spreekt in plaats van kweekscholen ook wel van de P.A.M.S. (Pedagogische A.M.S.) Een uniforme boekenlijst kent men aan deze inrichtingen niet.

De Inlandsche en Chineesche afdeelingen der P.A.M.S. zijn daarentegen 6-jarig. De leerlingen worden toegelaten na met vrucht de L.S. doorloopen te hebben. Het bezwaar daarvan is, dat de beroepskeuze drie jaar vroeger moet plaats hebben. Men heeft dit bezwaar echter grootendeels ondervangen door aan het einddiploma van den (3-jarigen) onderbouw der H.I.K. en H.C.K. dezelfde rechten te verleenen als aan het einddiploma M.U.L.O. B.

Internaten.

Aan alle kweekscholen is een internaat verbonden. Men acht dit voor de karaktervorming der a.s. onderwijzers van groote waarde.

Concordantie.

Bij het ontwerpen van het leerplan en de exameneischen (alleen de laatste zijn officieel vastgesteld) is streng vastgehouden aan de concordantie met Nederland. In het kweekschoolplan lezen we daaromtrent:

„Het waarborgt het gelijke peil van het onderwijs hier te lande „en dat in Nederland. Het vloeit voort uit het recht, dat het Euro- „peesche cultuurleven hier te lande heeft om aangeschakeld te „worden op dat van Nederland, zoodat het geestelijk verkeer „ongehinderd kan plaats vinden, en er geen klove ontstaat tusschen „de importkrachten en de hier voor hetzelfde Europeesche onderwijs „opgeleiden, en dat de voor de trekkerskinderen noodzakelijke „aansluiting tusschen scholen hier en ginder niet verloren gaat.

„Zoolang we Westersch onderwijs hebben te geven, begeerd door „alle landaarden, zoolang dient de concordantie het vaste punt te „blijven, waarnaar het onderwijs zich heeft te richten. Als we dit „punt loslaten, raken we in het moeras. Een voorbeeld zien we in „Br. Indië, in Fr. Indo-China en in de Philippijnen, waar het onder- „wijs naar beneden is gegleden, omdat er geen concordantie met „het moederland was."

Het strenge vasthouden aan den concordantie-eisch heeft tot gevolg gehad, dat de programma's der kweekscholen eenigszins overladen zijn, omdat er ook nog aan specifiek Indische eischen

voldaan moet worden (Inheemsche talen, Chineesch cultuurleven enz.).

E i n d e x a m e n i s S t a a t s e x a m e n.

De onderwijsraad sprak zich in zijn advies met 13 tegen 2 stemmen uit ten gunste van een staatsexamen. De voorstanders van een schoolexamen bepleitten dit, omdat het de logische consequentie is van de als een recht gevorderde en ook als een recht door de Regeering erkende vrijheid van onderwijs. Het bevordert de rustige ontwikkeling, terwijl het staatsexamen de oude drilmethode bestendigt. In vele gevallen is het een radicale onmogelijkheid om een objectief oordeel te vellen over de capaciteiten en den wetenschappelijken aanleg en ontwikkeling van iemand na een half uur vragen stellen.

De voorstanders van een staatsexamen konden deze motieven voor een schoolexamen over het algemeen onderschrijven, maar moesten toch op practische gronden het schoolexamen ontraden. Zij waren van meening, dat bij een schoolexamen sommigen aan de gelegenheid tot misbruiken geen weerstand zouden kunnen bieden, wat ten gevolge heeft, dat het examen en daarmee het onderwijspeil wordt verlaagd. Terwille van de naam van de school (particuliere scholen werken veel met advertenties, waarin het percentage geslaagden is vermeld; ook bij gouvernementsscholen trekt dit percentage steeds meer belangstelling) wordt maar al te graag een te milde maatstaf aangelegd, die alleen tegengegaan kan worden door gecommitteerden te benoemen, die *deskundig* en *onafhankelijk* de resultaten kunnen beoordeelen.

Bovendien waarborgt een staatsexamen uniformiteit. We lezen dan ook op blz. 17 van het kweekschoolplan:

„De tegenstanders van een schoolexamen konden hun bezwaren, „ondanks de uitmuntende verdediging, niet laten varen. Dit bewijst, „hoe diep de overtuiging is geworteld, dat het schoolexamen zijn in „principe erkende superioriteit niet zal kunnen handhaven, omdat „de menschelijke zwakheden zich er te ongehinderd van meester „kunnen maken en het naar beneden zullen sleuren" . . . . . .

„De tegenstanders handhaafden hun standpunt; voor hen heeft „het in Holland ingevoerde schoolexamen zijn prestige verloren en „men wenscht Indië voor den pijnlijken strijd, dien Holland te zien „geeft, te bewaren."

H o o f d a c t e. U n i f i c a t i e.

De differentiatie in de opleiding voor de hulpacte gaat over in een unificatie in de opleiding voor de hoofdacte. In het kweekschoolplan is een dagschool voor opleiding tot de hoofdacte geprojecteerd, waarvan de bedoeling is, dat ze op den duur zal uitgroeien tot een paedagogisch instituut, dat als een deel van een universiteit is gedacht.

Het uniformiteitsprincipe lijdt slechts in zooverre aan uitzondering, dat naast de „Indische" hoofdakte een afzonderlijke Europeesche hoofdacte bestaat, die slechts van de Indische verschilt, t.a.v. de vereischte kennis van de Nederlandsche taal. Personen, die reeds in het bezit zijn van de Indische hoofdacte, kunnen door een aanvullend examen in het Nederlandsch de Europeesche hoofdacte verwerven (de z.g. aanteekening Nederlandsch).

Aan het eind gekomen van dit geenszins volledige overzicht, zijn we er ons volkomen van bewust, dat we aan algemeene beschouwingen noodgedrongen meer aandacht hebben besteed dan aan het wiskunde-onderwijs in engeren zin.

De ingewikkelde structuur van het onderwijs hier te lande, gepaard gaande met de vrijwel algeheele overeenstemming in de wiskunde-programma's met die van soortgelijke onderwijsinrichtingen in Nederland vormen de verklaring voor het domineeren der algemeene beschouwingen. Wij hopen echter, dat het de belangstelling van de lezers van dit tijdschrift voor het onderwerp niet heeft gedoofd en dat zij, die een werkkring bij het onderwijs in Indië ambieeren, eenigszins een idee hebben bekregen van de omstandigheden, waaronder zij hier zullen moeten arbeiden.

ALGEMEENE MIDDELBARE SCHOOL (Afdeeling B).

(Wis- en natuurkundige Afd.)

te *Djogjakarta.*

Het onderwijs omvat voor *Wiskunde:*

a. *Reken- en Stelkunde.*

1e klasse: Herhaling van het geleerde. Imaginaire en complexe getallen. Expon. en logar. vergelijkingen. Grafieken.

2e klasse: Reeksen en samengest. interestberekening. Invoeren en verdrijven van wortels. Vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen kunnen worden teruggebracht. Grafieken.

3e klasse: Herhaling.

b. *Vlakke Meetkunde.*

1e klasse: Herhaling en uitbreiding.

2e klasse: Herhaling en uitbreiding.

3e klasse: Herhaling.

c. *Gonio- en trigonometrie.*

1e klasse: Tot aan de scheefhoekige driehoeken.

2e klasse: Voortzetting. Eenvoudige goniometrische vergel.

3e klasse: Herhaling.

d. *Stereometrie.*

1e klasse: Tot aan de inhouden.

2e klasse: Tot en met de omwentelingslichamen.

3e klasse: Herhaling.

e. *Beschrijvende Meetkunde.*

1e klasse: Tot aan de ligging van punten, lijnen t.o.v. vlakken.

2e klasse: Tot de hoeken tusschen vlakken.

3e klasse: Voortzetting en herhaling.

WESTERSCH-KLASSIEKE AFDEELING (V.H.O. Afd. A II) der ALGEMEENE MIDDELBARE SCHOOL.

Wiskunde.

IV. *Algebra:* Grafische voorstellingen; herhaling.
Driehoeksmeting: De goniometrie van den enkelen hoek en berekeningen in den rechthoekigen driehoek.

V. *Algebra:* Grafieken en herhaling.
Stereometrie: Oppervlakken en inhouden tot aan den bol.

VI. *Algebra:* Grafieken, herhaling.
Stereometrie: De bol en de regelmatige veelvlakken (enkel, viervlak, kubus, achtvlak); herhaling.

VOORBEREIDEND HOOGER ONDERWIJS (Afd. A I)

(Oostersche-letterkundige Afdeeling der ALGEMEENE-MIDDELBARE SCHOOL te *Soerakarta*.

Wiskunde:

IV. *Algebra:* Grafische voorstellingen, herhaling.
Driehoeksmeting: De goniometrie van den enkelen hoek en berekeningen in den rechthoekigen driehoek.
Stereometrie: Van het begin tot aan de drievlakshoek.

V. *Algebra:* Grafieken en herhaling.
Stereometrie: Oppervlakken en inhouden tot aan de bol.

VI. *Algebra:* Maxima en minima; grafieken en herhaling.
Stereometrie: De bol en de regelmatige veelvlakken (enkel, viervlak, kubus, achtvlak); herhaling.

HET CHRISTELIJK LYCEUM te *Bandoeng*.

Wiskunde:

Kl. I 6 uur: *Reken- en Stelkunde.*

Hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen en geheele stelkundige vormen. Merkwaardige producten. Ontbindingen in factoren.

Eenvoudige vergelijkingen. Grafische voorstellingen. G.G. en K.G.V. Deelbaarheid van getallen. Evenredigheden. Vierkantsworteltrekking.

Meetkunde:

Eenvoudige eigenschappen der vlakke figuren. Congruentie van driehoeken en veelhoeken.

Kl. II 6 uur: *Reken en Stelkunde:*

Gebroken vormen. Eenvoudige wortelvormen. Voortzetting van de vergelijkingen van den 1sten graad met een of meer onbekenden. Eenvoudige grafische voorstellingen. Reeksen en limieten. Eenvoudigste begrippen van benaderde waarden.

Meetkunde:

Evenredigheid van lijnen. Gelijkvormigheid van driehoeken en veelhoeken. Merkwaardige lijnen in een driehoek. Oppervlakken.

III G 2. 6 uur: *Algebra.*

Voortzetting van de vergelijkingen van den 1sten graad met 3 en meer onbekenden. Grafische voorstellingen. Wortelgrootheden. Gebroken en negatieve exponenten. Logarithmen.

Meetkunde:

De cirkel en de regelmatige veelhoeken.

III H 7. 6 uur: *Reken- en Stelkunde.*

Gebroken en negatieve exponenten. Complexe getallen. Vergelijkingen van den tweeden graad (en enkele van hoogeren graad, die hiermede samenhangen) met een en meer onbekenden. Logarithmen. Grafische voorstellingen.

Goniometrie:

Goniometrie van den enkelen hoek.

Meetkunde:

Vervolg van de oppervlakken. De cirkel en de regelmatige veelhoeken. Oppervlak en omtrek van den cirkel.

IV G 2. 6 uur: *Stelkunde.*

Eenvoudige vierkantsvergelijkingen. Grafische voorstellingen.

Meetkunde:

Construeeren met behulp van algebraische analyse, meer ingewikkelde vormen. Herhaling der planimetrie. Goniometrie van den enkelen hoek.

IV H 5. 6 uur: *Stelkunde.*

Het begrip functie en wat daarmede samenhangt. Reeksen en samengestelde interest. Onbepaalde vergelijkingen. Voortzetting van de goniometrie. Trigonometrie.

Stereometrie:

Lijnen. Vlakken. Tweevlakshoek. Drievlakshoek. Meetkundige plaatsen. Inhouden.

Beschrijvende Meetkunde:

Inleiding.

Analytische Meetkunde:

Infinitesimaalrekening, inleiding.

V G 2. uur: (A en B) *Algebra:*

Meer uitgebreide behandeling der vierkantsvergelijkingen en herhaling.

Meetkunde:

De stereometrie tot den bol.

B 3 uur: *Algebra:*

Logarithmen. Logarithmische en exponentieele vergelijkingen; vergelijkingen van hoogeren graad met meer onbekenden. Rekenkundige, meetkundige en harmonische reeksen. Samengestelde Interest.

Meetkunde:

Uitbreiding der goniometrie. Vlakke trigonometrie. Analytische meetkunde.

V H. 4 uur: *Algebra:*

Logarithmische en exponentieele vergelijkingen. Herhaling. Goniometrie en Trigonometrie. Voortzetting. Enkele eenvoudige goniometrische vergelijkingen. Herhaling.

Meetkunde:

Herhaling der planimetrie.

Stereometrie:

Voortzetting en herhaling der stereometrie.

Beschrijvende Meetkunde:

Voortzetting tot den bol. Herhaling.

VI G. 2 uur: *Algebra:*

Algemeene herhaling.

A 2 uur: *Meetkunde:*

Voortzetting en herhaling der stereometrie.

B 5 uur: *Algebra:*

Algemeene herhaling en toepassing op vraagstukken. Beginselen der infinitesimaal rekening.

Meetkunde:

Voortzetting en herhaling der stereometrie. Herhaling van de planimetrie, goniometrie en vlakke trigonometrie. Toepassing der analytische meetkunde tot en met de kegelsneden.

PROGRAMMA VAN HET EXAMEN TER VERKRIJGING EENER ACTE VAN BEKWAAMHEID ALS ONDERWIJZER(ES) VOOR DE EUR. LAGERE SCHOOL.

Rekenkunde.

a. Bekendheid met de hoofdzaken der rekenkunde, t.w. de hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen; K.G.V. en G.G.D.; de meetkundige evenredigheden; vierkantsworteltrekking.
b. Eenige bekendheid met de hoofdzaken van het handelsrekenen.

Wiskunde.

a. Algebra. Eenige bekendheid met de hoofdzaken uit de algebra tot en met de vergelijkingen van den tweeden graad met één onbekende.
b. Meetkunde. Eenige bekendheid met de hoofdzaken uit de vlakke meetkunde en uit de meetkunde in de ruimte.

LEERPROGRAMMA KWEEKSCHOLEN.

Rekenen.

1. *Het practisch rekenen.*

a. Het maken van vraagstukken, die den leerling bekwamen voor zijn taak in de lagere school en niet zwaarder mogen zijn dan in verband daarmee noodzakelijk is.
b. Herhaling van het handelsrekenen, zooals dat op de Mulo-scholen onderwezen werd. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de voor Indië belangrijke munten, maten en gewichten. Waar de tijd het toelaat, kan uitvoeriger behandeling dan op de Mulo plaats vinden.

2. *De theorie der rekenkunde* met daarbij behoorende vraagstukken, die uitsluitend bedoelen na te gaan, of het geleerde begrepen is. Behandeld wordt het verband tusschen algebra en rekenkunde.

3. *De methodiek van het rekenen* in de lagere school (in overleg met den leeraar in de opvoedkunde).

Wiskunde.

1. *Meetkunde.* Een herhaling van het op de Muloschool geleerde. De hoofdzaken van de meetkunde in de ruimte.

2. *Algebra.* Als bij vlakke meetkunde. Grafische voorstellingen.

LEERPLAN MULO B. 1ste leerjaar.

Rekenen.

a. Vlug en nauwkeurig cijferen. (Veel oefeningen, aansluitende bij andere onderdeelen van het rekenen).

b. Hoofdrekenen (onder het overige rekenen, indien dit er aanleiding toe geeft).

c. Eenvoudige behandeling van de theorie der hoofdbewerkingen G.G.D. en K.G.V., alles voor zoover de kennis daarvan noodig is bij de algebra.

d. Verhoudingen en meetkundige evenredigheden.

Handelsrekenen.

Procentrekening. Interestberekeningen (geen samengestelde interest). Munten. Eenige kennis van de algemeen gebruikte Indische en Nederlandsche, benevens van de vreemde, die, welke uit een handelsoogpunt voor Indië van zeer groot belang zijn; gehalte, eenvoudige berekeningen hiermee. Maten en gewichten van Nederland en Ned. Indië. Rekening-courant met renteberekening (alleen de Staffel-methode).

Algebra.

Hoofdbewerkingen met geheele stelkundige vormen. Merkwaardige producten. Ontbinding in factoren. G.G.D. en K.G.V. Begin van de breuken. Vergelijkingen van den 1sten graad met één onbekende.

Meetkunde.

Vlakke meetkunde: tot aan de evenredigheid van lijnen.

2de Leerjaar.

Rekenen.

a. Vlug en nauwkeurig cijferen.

b. Hoofdrekenen (occasioneel).
c. Herhaling van de eigenschappen der hoofdbewerkingen; de G.G.D. en het K.G.V.
d. Herhaling en toepassing der evenredigheden.
e. De vierkantsworteltrekking.
f. Rekenkundige reeksen. Inleiding tot de meetkundige reeksen.

Algebra.

Vervolg der breuken. Merkwaardige quotienten. Vergelijkingen van den eersten graad met één en meer dan één onbekende. Wortelvormen.

Meetkunde.

Vlakke meetkunde. Evenredigheid van lijnen. Gelijkvormigheid van figuren. Oppervlakte van rechtlijnige figuren. Zoo mogelijk de eenvoudigste eigenschappen van den cirkel.

3de Leerjaar.

Rekenen.

a. Vlug en nauwkeurig cijferen.
b. Hoofdrekenen (occasioneel).
c. Logarithmen.
d. Meetkundige Reeksen — Herhaling.

Algebra.

Gebroken en negatieve exponenten. Vergelijkingen van den tweeden graad met één onbekende. Eenvoudige ontbindingen met behulp van een vergelijking van den tweeden graad. Algemeene herhaling.

Meetkunde.

Vlakke meetkunde: Voortzetting van den cirkel. In- en omgeschreven veelhoeken.

Meetkunde in de ruimte: Prisma, pyramide. Omwentelingslichamen (cylinder, kegel, bol). Regelmatige lichamen. Herhaling.

LEERPLAN VAN DE HOOGERE BURGERSCHOOL MET VIJFJARIGEN LEERGANG IN NEDERLANDSCH-INDIE.

Het onderwijs omvat:

a. Voor *Wiskunde:*

Ondergeteekende, **abonné op** { „Christiaan Huygens"
„N. T. voor Wiskunde"
„Euclides" (het vroegere Bijvoegsel)

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

WIJDENES, MIDDEL-ALGEBRA, 2e druk,

geb. à f 10,50, gewone prijs is f 12,50,

door bemiddeling van den boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Maart 1934; voor Indië tot 1 Mei 1934.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN

$1^1/_2$ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

GRONINGEN.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

PROSPECTUS.

MIDDEL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

TWEEDE DRUK

Prijs geb. *f* 12,50; voor abonné's op Chr. Huygens, N. T. v. Wisk. en Euclides geb. à *f* 10,50.

Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Maart 1934.

ANTWOORDEN *f* 2,00.

P. NOORDHOFF N.V. — 1934 — GRONINGEN-BATAVIA

In den boekhandel verkrijgbaar.

VOORBERICHT.

De tweede druk van deze Middel-algebra is een geheel ander boek geworden dan de eerste; zelfs heb ik overwogen of de naam wel behouden kon worden; daar er geen betere is, die de inhoud dekt, is hij behouden. De bedoeling is nl. een boek te geven als inleiding tot verdere studie. Ik stel me daarbij drie klassen van gebruikers voor en wel ten eerste hen, die de exacte wetenschappen als hun vak kiezen; voor hen kan het dienen om hen letterwijs te maken en om de groote kloof, die er gaapt tusschen het laatste jaar middelbaar onderwijs en het eerste jaar hooger onderwijs, te overbruggen; de studenten gaan dan daarna over op de Hoogere Algebra, zoo uitnemend door Prof. SCHUH behandeld in de Lessen over de Hoogere Algebra.

Ten tweede zijn er, die de wiskunde als hulpwetenschap noodig hebben; het zijn de studenten in Delft en Wageningen, de officieren in Breda en Willemsoord en op de Hoogescholen zij, die niet de zuivere wiskunde als studievak hebben gekozen: de chemici, de biologen, de astronomen en nog wel anderen. Voor al deze studeerenden is dit boek de inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening met het Beknopte Leerboek van Prof. Dr. HK. DE VRIES als leidraad, als men zich tot de wiskunde bepaalt en met de Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening (thans ter perse) van Dr. H. J. E. BETH, als men tevens toepassingen op andere gebieden wenscht. Bij deze groep van gebruikers sluiten zich aan zij, die voor hun genoegen wat verder gaan dan de lagere algebra, zich echter als amateurs niet in bijzonderheden willen verliezen, maar alleen het voornaamste van de algebra wenschen op te nemen in licht verteerbare vorm.

Ten derde zijn er de candidaten voor de acte KI, die het boek naast de Beknopte Hoogere Algebra van Prof. SCHUH zullen gebruiken om zich door een eenvoudige voorstelling op de hoogte te stellen van het grootste deel van wat ze moeten kennen.

Geen van de drie klassen van gebruikers maakt het noodig, dat er meer zou moeten worden behandeld; ontwikkeling in reeksen komt bij de eerste twee in de analyse, terwijl de derde het in geen geval zonder de Beknopte Hoogere Algebra kan stellen, waarin de reeksen, vrij uitvoerig tot hun recht komen. Niet behandeld is het hoofdstuk over de splitsing van breuken; het

weinige, dat daarvan noodig is in de Integraalrekening, wordt daar ook geleerd; evenmin zijn behandeld de wederkeerige reeksen en de kettingbreuken; beide kunnen voor het doel, dat met de Middelalgebra wordt beoogd, worden gemist. Daartegenover staat, dat moeite is gedaan om eenige algemeene kennis, die eigenlijk onder geen enkel hoofd is te brengen, door het boek heen te weven.

Gaarne betuig ik mijn oprechte dank aan Prof. Dr. F. SCHUH, die het geheele handschrift zorgvuldig heeft nagegaan en menige verbetering heeft aangebracht; bij de voorafgaande besprekingen heeft hij er op gestaan, hoofdstuk XIII te schrijven; dit geeft nu een samensmelting van de theorema's van ROLLE, DESCARTES, BUDAN en STURM over de scheiding der wortels van een hoogeremachtsvergelijking.

Minstens evenveel dank ben ik verschuldigd aan mijn trouwe helpers bij mijn dagelijksche arbeid, nl. aan den Heer H. HERREILERS, die vooral groote zorg heeft besteed aan de vraagstukken en alle antwoorden uitwerkte; en aan den Heer K. HARLAAR, wien ik opdroeg hoofdstuk VII te schrijven. Dat beiden ten volle geslaagd zijn, zal men zelfs bij vluchtige kennismaking al kunnen opmerken.

De geschiedkundige aanteekeningen van blz. 577 zijn van de hand van Dr. E. J. DIJKSTERHUIS; met zijn bekende welwillendheid stond hij mij dadelijk ten dienste, toen ik hem vroeg, de noodige gegevens op schrift te stellen omtrent de wiskundigen, die in dit boek genoemd worden. Hartelijke dank breng ik hem voor zijn deel in dit werk.

Eindelijk heeft Prof. Dr. H. BREMEKAMP mij de vraagstukken van blz. 573 bezorgd; ook hij aanvaarde daarvoor mijn dank.

Natuurlijk houd ik mij ten zeerste aanbevolen voor op- en aanmerkingen, zoowel van hen, die de stof, in dit boek verwerkt, onderwijzen, als van studeerenden; ook voor mogelijke wenschen, waarmee later rekening gehouden zal kunnen worden.

Amsterdam Zuid, Oct. 1933. P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

De antwoorden, waarvan vele van aanwijzingen zijn voorzien, zijn reeds ter perse. Zij, die zich op andere vraagstukken willen oefenen, worden gewezen op mijn *Vraagstukken over Hoogere Algebra en Rekenkunde, tweede druk, met antwoorden,* mede verschenen bij den uitgever van dit boek.

INHOUD.

TER INLEIDING
VAN DE
PLANIMETRIE

EENVOUDIG SCHOOLBOEK VOOR HET EERSTE ONDERWIJS IN DE VLAKKE MEETKUNDE

TWEEDE DRUK.

De eerste druk verscheen tegen de Kerstvacantie 1931, toen alle scholen aan de gang waren. In de eerste week van September 1932 ging de tweede druk ter perse.

„Op onze school geven we vlakke meetkunde en stereometrie; is het niet mogelijk Uw Beknopte Meetkunde uit te geven zonder de berekeningen van de oppervlakte en de inhoud van lichamen?" Eenige keeren heb ik die vraag gehad; met de verschijning van dit boekje wordt aan het verzoek voldaan. Het is echter geen overdruk van de planimetrie uit het bedoelde boekje; hier en daar heeft het ingrijpende veranderingen ondergaan, zonder dat ook maar ergens het eenvoudige karakter, dat de Beknopte Meetkunde kenmerkt, uit het oog is verloren. Uit de gewone meetkunde heb ik dus weggelaten, wat daarmee in tegenspraak zou zijn b.v. de onderlinge ligging van twee cirkels is tot een minimum beperkt; ik heb gezwegen over onmeetbare verhoudingen; het hoofdstuk over de vermenigvuldiging van figuren bekort; de behandeling van lijnstukken, waarvan de lengte in wortels wordt uitgedrukt als $a\sqrt{5}$ zoover mogelijk uitgesteld; ook de meetkundige plaatsen vrijwel naar het eind verschoven. Geschrapt is het hoofdstuk over de congruentie van veelhoeken; die van vierhoeken kunnen wel gegeven worden, zonder dat die van veelhoeken vooraf behandeld worden; ook die van vierhoeken is sterk ingekrompen. **Men kan meetkunde beoefenen en het een aardig eindje brengen in dit vak, zonder dat men behoefte gevoelt aan het weggelatene of gebaat zou zijn met een meer uitgebreide behandeling van het besnoeide**. Opgenomen is alleen een paragraaf over de stelling van Stewart; dit op verzoek.

Het boekje is opzettelijk eenvoudig gehouden; maar dat beteekent niet, dat met hetgeen er in staat, de hand is gelicht; integendeel. Zoo heb ik niet geaarzeld de volledige uitwerking te geven

Werkstukken.

van een paar werkstukken, waarmee ik wou laten zien, hoe het behoort, nadat eerst voorbeelden en eenvoudige werkstukken als

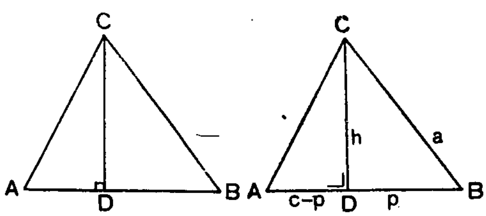
inleiding zijn gegeven. Zeker, ik weet heel goed, dat de jongens er niet veel van terecht brengen, als ze het alleen moeten doen, maar dat mag geen reden zijn om iets, waar ze bij kunnen, hun te onthouden. — Ieder geeft de grondconstructies (b.v. de loodlijn uit P op l) met bewijs; die van een driehoek, waarvan twee zijden en de hoek over een van deze gegeven zijn, met de bespreking. Daarom is het zoo goed een paar voorbeelden geheel in het boek voor te doen. Eigen werk van leerlingen, dat weet ieder, is gewoonlijk dun, meer dan dun. Zelfs, als men alleen de voorbereiding (het oud-Hollandsche woord voor het voor kinderen onbegrijpelijke Grieksche woord analyse hoop ik te doen herleven) en de uitvoering vraagt, haspelen ze deze hopeloos door elkaar. Van het bewijs komt zelden iets terecht. Ondanks alle moeite van den leeraar blijft het een struikelblok; let wel, niet het vinden van de oplossing, maar de volledige vierledige uitwerking. Zoo bij één onderwerp, dan moet men hier zeker water door de wijn doen en een goede bedoeling voor een goede oplossing rekenen. — Maar dan is het zeer gewenscht in het boek eens een paar keer geheel naar den eisch een werkstuk volledig op te lossen.

Rechte en lijnstuk. Natuurlijk heb ik overal onderscheid gemaakt tusschen de geheel verschillende begrippen: rechte lijn, halve lijn en lijnstuk. Verlengt men een lijn aan weerskanten of een lijnstuk? Construeert men de middelevenredige van twee lijnen of van twee lijnstukken? Wordt een lijnstuk of een lijn middendoor gedeeld? Evenredigheid van lijnen of van lijnstukken? — Eens goed begrepen, en de leerling vergist zich nooit meer. De meetkunde wordt er zuiverder en begrijpelijker door. — Gaarne hierover nog het volgende: alleen de lijnstukken zijn te meten met een eenheid; bij $a + b > c$ bv. behoeft dat nog niet, maar bij $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp$ bedoelen we met de kleine letters de aantallen lengte-eenheden van bepaalde lijnstukken. Men zou nog moeten onderscheiden lijnstuk en lengte van een lijnstuk; ik heb dat niet gedaan, omdat men in een geval als st. 18 b.v. in $p + q > a + c$ ook aan aantallen eenheden mag denken, al is dat niet noodzakelijk. Ik ben niet zoover gegaan om te onderscheiden hoogtelijn en hoogtelijnstuk; de hoogtelijn uit A is de lijn, die door A loodrecht op BC wordt getrokken en het stuk daarvan van A tot BC of haar verlengde is het hoogtelijnstuk. Ik heb me hier echter willen houden aan de goede gewoonte om

dat stuk de hoogtelijn te noemen; in de eerste beteekenis komen de merkwaardige lijnen te weinig voor en hier kan geen verwarring ontstaan.

Zoodra men aan het berekenen gaat, rekent men verder met de aantallen eenheden der lijnstukken, met de aantallen graden van hoeken en **dan is de meetkunde niet anders dan de algebra van lijnstukken, hoeken en bogen.** Vandaar, dat dan de groote moeilijkheden optreden voor de leerlingen: *de algebra, toegepast op figuren*; daarom ben ik daar pas laat mee begonnen en daarom komt bij gebruik van dit werkje deze stof vrijwel geheel in de derde klas. Als we werken met getallen, hetzij in de algebra, hetzij in haar toepassingen op figuren, wat dan meetkunde wordt genoemd, dan wordt zoo'n getal (dus in de meetkunde het aantal eenheden van een lijnstuk) met een enkele kleine letter aangewezen, in plaats van zooals nog voorkomt in vele boekjes, met twee hoofdletters. **Men moet steeds zorgen alles zoo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk te geven.** Zie nu eens dit bewijs, letterlijk uit een schoolboek, en het tweede bewijs van de projectiestelling.

Vermijd zoo mogelijk de hoofdletters.



Ondersteld: $\angle$ B is scherp; CD $\perp$ AB.

Gestelde: $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \times BD$.

Bewijs. AC^2 kan men in de rechthoekige driehoek ACD uitdrukken in de twee andere zijden:

$$AC^2 = DC^2 + DA^2$$

DC^2 kan nu uitgedrukt worden in de zijden van de driehoek CDB:

$$DC^2 = CB^2 - DB^2$$

en voor DA kan men schrijven AB — DB.

We hebben derhalve:

$$DC^2 = BC^2 - DB^2$$
$$DA^2 = AB^2 - 2AB \times DB + DB^2$$

———————————————— op

dus $DC^2 + DA^2$ of $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times DB$.

Niet alleen een kind heeft hieraan een heele kluif; door de rompslomp ontgaat hem het bewijs, dat feitelijk zoo heel eenvoudig is.

Op mijn manier aldus (fig. rechts).

☞ **Antwoorden op de berekeningen verschijnen in het voorjaar 1933; deze zullen niet in de handel zijn; docenten, die de boekjes met hun klas gebruiken, kunnen deze antwoorden bij den uitgever of bij den schrijver aanvragen.**

Onderstelde: CD $\perp$ AB; $\angle$ B scherp.

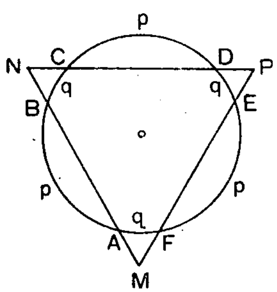
Gestelde: $b^2 = a^2 + c^2 - 2cp$.

Bewijs. Zie voor de lengte der lijnstukken de figuur; in $\triangle$ ACD is $b^2 = (c - p)^2 + h^2 = c^2 - 2cp + p^2 + h^2$; de som van de laatste twee termen is a^2; dus hebben we $b^2 = a^2 + c^2 - 2cp$.

Een tweede voorbeeld is het volgende:

Een cirkel wordt door 6 punten verdeeld in bogen, die om de andere gelijk zijn. Bewijs, dat drie gelijke koorden met haar verlengden aan weerszijden een gelijkzijdige driehoek vormen.

Geg.: bg AB = bg CD = bg EF; bg BC = bg DE = bg FA.



Gest.: $\angle$ M = $\angle$ N = $\angle$ P = $\angle$ 60°.

Bewijs: $\angle$ P = ½ (bg CB + bg BA + bg AF — bg DE) = ½ (bg BA + bg AF) = ½ bg BF; $\angle$ M = ½ (bg BC + bgCD+ bg DE — bg AF) = ½ (bg BC + bg CD) = ½ (bg BA + bg AF) = ½ bg BF; $\angle$ N = ½ (bg DE + bg EF + bg FA — bg BC) = ½ (bg EF + bg FA) = ½ (bg BA + bg AF) = ½ bg BF. De drie hoeken zijn dus de helften van gelijke bogen en dus gelijk, ieder is dus 60°; de driehoek is dus gelijkzijdig.

Beter. Geg.: bg AB = bg CD = bg EF = p;
bg BC = bg DE = bg FA = q.

Gest.: $\triangle$ MNP is gelijkzijdig.

Bewijs: $3p + 3q = 360°$, dus is $p + q = 120°$.

$\angle$ P = $\frac{1}{2}(p + 2q - q) = \frac{1}{2}(p + q) = 60°$; idem $\angle$ M en $\angle$ N; omdat alle hoeken gelijk zijn, is de driehoek gelijkzijdig.

De eerste oplossing hiervan heb ik vrijwel woordelijk overgeschreven van werk, door een leerling (niet door mij opgevoed) ingeleverd; de oplossingen zijn weer dezelfde en toch wat een verschil! De eerste oplossingen zijn bijna niet te lezen en het is ontzettend vermoeiend, als men er een 25-tal van de klasse onder de oogen krijgt en dan telkens alles moet nawijzen op de figuur!

Dat nazien van meetkunde-sommen is toch al zoo'n karwei; al die prutsige figuren, die onduidelijke letters, al die malle omwegen en domme dingen, ... laat ik er maar niets van zeggen, U weet het even goed als ik. En als de oplossing dan ook nog onleesbaar wordt door een massa paren hoofdletters, die te vervangen zijn

door één kleine letter, als alle hoeken met drie letters worden aangeduid, wel, dan mag men niet eischen, dat kinderen een meetkundeles leeren *en dan moet men, mede uit zelfbehoud,* de weg inslaan, die ik in deze en alle andere boekjes en boeken volg. *Het is volstrekt noodzakelijk de meetkunde te ontdoen van onnoodige ballast, die de leerstof en de behandeling verplet, de belangstelling der kinderen doodt, het nazien voor U tot een plaag maakt. Alles wat ons hindert in de beweging moet, zoo eenigszins mogelijk, op zij gezet worden; men gaat ook niet tennissen met baggerlaarzen aan, turnen in gekleede jas en toga, voetballen met een hooge zijen op!*

Aan het slot nog een paar kleinigheden.

1. Het aantal sommen, vooral het aantal eenvoudige sommetjes, is heel wat grooter dan in de Beknopte Meetkunde; de herhalingen geven voldoende stof voor proefwerken.

2. Veel wat was aangeduid of aan den leerling werd overgelaten, is nu uitgewerkt.

3. Verscheidene sommen zijn volledig uitgewerkt als model.

4. In de meeste werkstukken zijn de maten in cm en graden gegeven; ook andere hoeken dan de gebruikelijke kunnen nu worden gegeven; als men wel met een latje 4 cm mag uitzetten, waarom dan niet bv. 40° met de gradenboog? Deze bepaalde gegevens moeten de knoeierij voor een deel opheffen; ze bekorten bovendien de werkstukken.

5. Ik heb ze geleerd met driehoekjes om te gaan; niemand, die practisch meetkunde beoefent, en een nette figuur wil maken trekt evenwijdige lijnen anders dan met een stel driehoeken; noch zal hij loodlijnen zetten zonder behoorlijk zijn materiaal te gebruiken. Alles met de passer te laten construeeren is volslagen ondoenlijk; en als er uit de hand of enkel met een latje maar wat getrokken wordt, dan is het eind van de knoeiboel zoek. — En wat zou er tegen zijn, als de jongens op school reeds doen, wat ieder na het verlaten van de school in ambacht, op teekenkamer, in het bedrijf, het doet er niet toe wat, *moet* doen? Alles vóór, tenzij weer de school een instituut moet zijn, waar men leert, hoe niemand het later nog doet. Wat wel met meer onderdeelen van de leerstof het geval is en niet alleen voor de wiskunde geldt.

6. Reeds heel spoedig heb ik constructies gegeven en gevraagd, opdat toch vooral de meetkunde-les niet ontaarde in een „luister- en zitstil" les; over het geheel is veel werk van de werkstukken gemaakt.

7. Men zal vergeefs zoeken: de voetpuntsdriehoek, de regelmatige vijftienhoek en meer van die onderwerpen, die men thans ziet opduiken in schoolboekjes en die bij het middelbaar en gymnasiaal onderwijs of nooit behandeld werden of afgedaan hebben.

8. In dit boekje zijn 33 vraagstukken volledig opgelost; deze kunnen dienen als model. Evenmin als in de theorie is het in vraagstukken geoorloofd, dat de leerlingen allerlei woorden afkorten en dat ze een verkeerd gebruik van symbolen maken. Men mag zetten: „van $\triangle$ ABC enz.", maar niet „van een $\triangle$ verh. zich als de $\angle\angle$ als, enz." Men mag zetten: „Dus is $l \,//\, m$"; maar niet: „trekt men PQ // met de beide // zijden". Men mag zetten: „Dus is $\angle A = \angle B + \angle C$", maar niet „Een buitenhoek van een $\triangle$ = de som" enz.

Alle figuren (het zijn er heel wat) zijn nieuw geteekend, moeilijke sommen geschrapt, nieuwe ingelascht, zelfs vrij veel, zonder dat het karakter van eenvoudig schoolboek daaraan is opgeofferd. Ik meen, dat deze Planimetrie door meer voorbeelden, door eenvoudiger voorstelling, door zuiverheid van bewijsvoering en bepalingen en een correct gebruik van symbolen en afkortingen een boekje zal zijn, dat geschikt zal blijken voor M.U.L.O.-scholen, Kweekscholen, Seminaria, H.B.S. met driejarige cursus, Handelsscholen, Meisjesscholen, Zeevaartscholen, enz. en dat het een betrouwbare gids zal zijn voor de vele examens, waar men niet te hooge eischen aan de Vlakke Meetkunde stelt, maar waarbij men niet afdaalt tot vormleer of intuïtief gedoe, dat met Meetkunde weinig of niets heeft uit te staan.

Amsterdam Zuid. P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.
Nov. 1931.

Docenten aan bovengenoemde scholen worden verzocht een pres.-ex. aan te vragen.

UIT HET VOORBERICHT VAN DE BEKNOPTE MEETKUNDE.

Bij het eerste onderwijs in de Vlakke Meetkunde moet men vooral in het oog houden, dat de leerstof eenvoudig wordt gehouden, bevattelijk voor de leerlingen blijft en opklimt in moeilijkheid; dan komt ook de vormende waarde het meest tot haar recht. Deze eischen hebben mij er reeds jaren geleden toe gebracht schoonmaak te houden onder de leerstof en deze anders te rangschikken. In het voorbericht van mijn Beknopte Meetkunde schreef ik o.a. **Veel wat onnut was, heb ik weggelaten.** Waarom in alle bijzondere, opzettelijk ineengedraaide gevallen te bewijzen, dat twee driehoeken congruent of gelijkvormig zijn? Waarom constructies als $x = \sqrt[4]{abcd}$, waarom verdubbel-, halveer- en andere formules, waarom ontzettend veel onpractisch sleurgoed en om nog iets te noemen, waarom de volgorde zóó, dat het onderwijs telkens hokt en zóó, dat een zelfde onderwerp twee keer voorkomt? **Immers het hokt** bij de congruentie van driehoeken, als men die reeds bij eerste oefening uitbreidt tot: „basis, verschil der basishoeken en som der opstaande zijden"; dit slag heb ik veel verder op pas genomen bij de constructies. **Men loopt vast** in de tweede klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, 't zij deze op de verouderde, 't zij op de juiste manier behandeld wordt. Geen wonder: de onderlinge vergelijking van twee figuren (de eenvoudige congruentie uitgesloten natuurlijk) is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur b.v. wat betreft de oppervlakte, die vroeger pas in de derde klas kwam of de hoeken in een cirkel, die ook pas in de derde aan de beurt waren. Dan **loopt het spaak** in het laatst van de tweede klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken; deze stof behoort thuis in de derde klas, waar men door meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt. — Ook: omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt; ik bedoel daarmede de stellingen

van de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie van de gelijkvormigheid van rechtlijnige figuren en van de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen is veel beter.

Verder heb ik **eenige onderwerpen eenvoudiger behandeld** b.v. de vijf congruentie-gevallen heb ik tot vier teruggebracht, in volkomen overeenstemming met de vier van de gelijkvormigheid; men zie ook de behandeling van de oppervlakte en die van de regelmatige veelhoeken.

Met dit al moet ik er op wijzen, dat dit eenvoudige schoolboek een moderne geest ademt, evenals de grootere leerboeken. Het doorwerken met de klas is **door de logische rangschikking** en **de groote vereenvoudiging** van eenige onderwerpen gemakkelijk gemaakt, terwijl er **ruimschoots oefenstof** wordt gegeven; overal heb ik er voor gezorgd, **dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.**

Gebruikers van dit boekje zullen mij zeer verplichten met alle mogelijke op- en aanmerkingen, die tot verbetering kunnen leiden.

Amsterdam Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

☛ **Prijs sierlijk en stevig gebonden met gradenboog, 2 celluloiddriehoeken en overzicht . . . . . f 3.20**

Uitgave in twee deeltjes, elk met gradenboog, één driehoek en overzicht gec. . . . . à f 1.60

240 blz. 263 figuren 33 uitgewerkte voorbeelden

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN, BATAVIA.

Ondergeteekende abonneert zich op / wenscht toezending van een proefnummer

door bemiddeling van den boekhandel

direct per post,

van de tijdschriften:

1. **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,** . . . . . f 6.— fr. p. p.
2. **Christiaan Huygens,** . . . . f 10.— fr. p. p.
3. **Euclides** (het vroegere Bijvoegsel bij het N.T. v. W.) f 6.— fr. p. p.
4. De tijdschriften 1 en 2 . . . . f 14.— fr. p. p.
5. De tijdschriften 2 en 3 . . . . f 15.— fr. p. p.
6. De tijdschriften 1 en 3 . . . . f 11.— fr. p. p.
7. De tijdschriften 1, 2 en 3 . . . . f 19.— fr. p. p.

(Het niet verlangde door te halen.)

Naam ....

Straat en No. ....

Woonplaats: ....

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

$1^1/_2$ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

Klasse I (6 uur).

Rekenkunde: Eigenschappen van de hoofdbewerkingen. Deelbaarheid. Grootste gemeene Deeler en Kleinste Gemeene Veelvoud. Gewone en tiendeelige breuken. Vraagstukken. Evenredigheden.

Stelkunde: Hoofdbewerkingen met geheele vormen. Merkwaardige producten en quotiënten. Ontbinding in factoren. Vergelijkingen van den eersten graad met één onbekende.

Meetkunde: tot beginselen van de evenredigheden van lijnen.

Klasse II (6 uur).

Rekenkunde: Voortzetting der evenredigheden. Vierkantsworteltrekking. Eenvoudigste begrippen van onnauwkeurige getallen.

Stelkunde: Eenvoudige gevallen G.G.D. en K.G.V. Gebroken vormen. Voortzetting van de vergelijkingen van den eersten graad, ook met meer onbekenden. Wortelgrootheden (hiervan alleen die herleidingen, welke bij de meetkunde worden toegepast).

Meetkunde: Tot aan den cirkel.

Klasse III (8 uur).

Reken- en stelkunde: Gebroken en negatieve exponenten. Logarithmen. Reeksen. Samengestelde intrest. Vergelijkingen van den tweeden graad (en enkele van hoogeren graad, die hiermede samenhangen) met een en meer onbekenden. Grafische voorstellingen.

Goniometrie: De goniometrie van den enkelen hoek.

Meetkunde: Van den cirkel tot het einde der vlakke meetkunde.

Klasse IV (5 uur).

Stelkunde: Logarithmische en exponentiëele vergelijkingen. Herhaling.

Gonio- en trigonometrie: Voortzetting der goniometrie. Trigonometrie.

Meetkunde: Stereometrie tot aan de omwentelingslichamen. Inleiding der beschrijvende meetkunde.

Klasse V (4 uur).

Stelkunde: Herhaling.

Gonio- en trigonometrie: Voortzetting. Enkele eenvoudige goniometrische vergelijkingen. Herhaling.

Meetkunde: Voortzetting der stereometrie. Beschrijvende meetkunde tot aan den bol. Herhaling.

WISKUNDE. MIDD. TECHNISCHE SCHOLEN.

a. voor *Rekenen.* 1e klasse (2 uur).

Kenmerken van deelbaarheid; G.G.D., K.G.V, cijferen (Oppervlakte en Inhoud). Verhoudingen en evenredigheden (ook aaneengeschakelde). Vierkantsworteltrekking, cijferen. Herleiding Engelsche maten en gewichten tot Nederlandsche.

b. voor *Stelkunde.* 1e klasse (3 uur).

Bewerkingen met getallen door letters voorgesteld. Positieve en negatieve getallen. Hoofdbewerkingen hiermede. Herleidingen van vormen met haken, enz. Vergelijkingen van den 1sten graad met 1 onbekende. Ingekleede vergelijkingen. Merkwaardige producten en quotiënten. Het Binomium van Newton. De driehoek van Pascal. Ontbinding in factoren, G.G.D. en K.G.V.

2e klasse (3 uur).

Bewerkingen met breuken (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, deelen, machtverheffen). Wortelgrootheden en Wortelvormen. Vergelijkingen van den 1sten graad met onbekende in den noemer. Vergelijkingen met 2 en meer onbekenden. Ingekleede vergelijkingen. Coördinaten, graphische voorstelling (1ste graadvergelijking). Grafische voorstelling in verband met 2 vergelijkingen van den 1sten graad met 2 onbekenden.

3e klasse (3 uur).

a. *Logarithmen:* Logarithmen, inleidende eigenschappen en opzoeken in tafel. Principe rekenliniaal.

b. *Stelkunde:* Vierkantsvergelijkingen, ook ingekleede. Imaginaire en complexe grootheden. Eenvoudige eigenschappen van de wortels eener vierkantsvergelijking, bikwadratische en gemakkelijke ontbindbare hoogere graadvergelijking.

4e klasse (2 uur).

Eenvoudige behandeling van reeksen, rekenkundige- en meetkundige. Exponentieele en logarithmische vergelijkingen. Algemeene herhaling. Voor Electrotechnici iets uit functieleer. Omzetting Nep. log. in Brigg. log.

c. voor *Meetkunde.* 1e klasse (3 uur).

Inleiding — lijnen — hoeken. Evenwijdige lijnen gesneden door

een derde. Eenvoudige eigenschappen der driehoeken. Hoogtelijnen, mediaan, bisectrice. Congruentie van driehoeken. Grondconstructies, eenvoudigste meetkundige plaatsen, driehoekconstructies in verband met congruentie. Eenvoudigste eigenschappen der veelhoeken. Bijzondere 4-hoeken (parallelogram, ruit, rechthoek, kwadraat, trapezium) met hunne constructies.

2e klasse (4 uur).

Evenredigheid van lijnen, vermenigvuldiging van figuren. Gelijkvormigheid van driehoeken. Eigenschappen van den rechthoekigen driehoek. Projectiestelling in den driehoek. Berekening van hoogtelijn, zwaartelijn, hoekdeellijn. Oppervlakte-driehoek, parallelogram, trapezium. Vormverandering van figuren. Constructies van algebraïsche vormen. De cirkel, eenvoudige constructies, hoeken en cirkelbogen, evenredige lijnen van den cirkel. Toepassingen. Inleiding tot de meetkunde in de ruimte. Vlakken en lijnen, drievlakshoek. Beginselen der goniometrie, namen der functies, eenvoudigste eigenschappen der functies. Bekende waarden (30°, 45°, 60°). Opzoeken overige waarden in directe tafel (alleen 1ste kwadrant).

3e klasse (3 uur).

a. *Gonio- en trigonometrie:* Herhaling goniometrische verhoudingen, nu in alle kwadranten. Formules. Gebruik logarithmen der functies, opzoeken in logarithmentafel. Toepassingen. Scheeve driehoeken, sinus-, cosinus- en tangensregel. Formules van Gauss. Om-, in- en aangeschreven cirkel. Toegepaste driehoeksmeting.

b. *Vlakke meetkunde:* In-, om- en aangeschreven cirkels. Koorden- en raaklijnen-vierhoek. Regelmatige veelhoeken. Oppervlakte en omtrek cirkel.

c. *Ruimte-meetkunde:* Prisma, parallelopipedum. Pyramide, afgeknotte pyramide, prismoïde.

4e klasse (2 uur).

Voortzetting ruimte-meetkunde: Cylinder, kegel, bol en boldeelen. Regels van Guldin. Voortzetting trigonometrie. Algemeene herhaling.

DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN SEITEN UND DIAGONALEN EINES EBENEN n-ECKS

VON

ADOLF GOTTSCHALK, Siegen (Westf.).

Im folgenden wollen wir unter dem „Verankern" zweier Strecken P_1P_2 (a) und P_3P_4 (c) das Verbinden ihrer Mittelpunkte durch die Strecke m_{ac} verstehen. Das Produkt acm_{ac} soll dann eine Mittenverankerung heissen. Dieses Produkt soll auch symbolisch durch (P_1P_2, P_3P_4) ausgedrückt werden.

Im *Dreieck* sind offenbar die Mittenverankerungen je zweier Seiten einander gleich, da sie — die Seiten seien a, b, c — sämtlich gleich $\frac{abc}{2}$ sind.

Für das *Viereck* lautet der Satz von den Mittenverankerungen: „Die Summe der Quadrate der Mittenverankerungen der gegenüberliegenden Seiten und auch der Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der Mittenverankerungen zweier gegenüberliegender Seiten mit den Diagonalen."

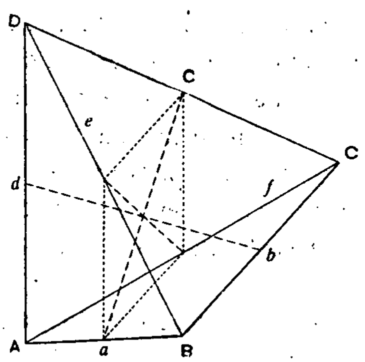


Fig. 1.

Diesen Satz erhalten wir, wenn wir von der Gaussschen Beziehung zwischen den Seiten a, b, c, d und den Diagonalen e und f ausgehen (Fig. 1); diese lautet:

$$(d^2 + a^2 - e^2)^2 f^2 + (a^2 + f^2 - b^2)^2 d^2 + (d^2 + f^2 - c^2)^2 a^2 - (d^2 + a^2 - e^2)(a^2 + f^2 - b^2)(d^2 + f^2 - c^2) = 4a^2d^2f^2. \text{ }^{1)}$$

Schreiben wir sie in der Form

$$e^2f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2) + a^2c^2(e^2 + f^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) + b^2d^2(c^2 + a^2 + e^2 + f^2 - b^2 - d^2) = a^2b^2f^2 + b^2c^2e^2 + c^2d^2f^2 + d^2a^2e^2,$$

---

[1]) Vergleiche meine Schrift: Der Aufbau der Geometrie und der Arbeitsunterricht, Verlag Vorländer Siegen.

setzen für die Klammern die Eulerschen Beziehungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 = 4m^2_{ef},$$
$$e^2 + f^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 4m^2_{ac},$$
$$c^2 + a^2 + e^2 + f^2 - b^2 - d^2 = 4m^2_{bd}$$

und beachten, dass auf der rechten Seite

$$a^2b^2f^2 = 4(afm_{af})^2,\ b^2c^2e^2 = 4(cem_{cc})^2,\ c^2d^2f^2 = 4(cfm_{cf})^2,$$
$$d^2a^2e^2 = 4(aem_{ae})^2$$

ist, so ergibt sich die dem oben ausgesprochenen Satze entsprechende Formel

$$(efm_{ef})^2 + (acm_{ac})^2 + (bdm_{bd})^2 = (afm_{af})^2 + (aem_{ae})^2 + (cem_{ce})^2 + (cfm_{cf})^2.$$

Die Mittenverankerungslinien, die auf der linken Seite dieser Gleichung vorkommen, sind in unserer Figur gestrichelt, die auf der rechten vorkommenden punktiert.

Es soll hier auf die umfassende Bedeutung dieses Satzes nicht näher eingegangen werden, es sei nur festgestellt, dass der Mittenverankerungssatz für das Parallelogramm die Beziehung zwischen einer Dreiecksmittellinie und den drei Seiten des Dreiecks liefert, während der Satz für das Rechteck nichts anderes ist als der pythagoreische Lehrsatz.

Sind von den 6 Stücken eines Vierecks *a, b, c, d, e, f* fünf bekannt, so ergibt sich das sechste unmittelbar aus der ursprünglichen Gaussschen Formel. Das ist natürlich auch von Wichtigkeit für die Beziehungen in den *n*-Ecken, wenn $n > 4$ ist.

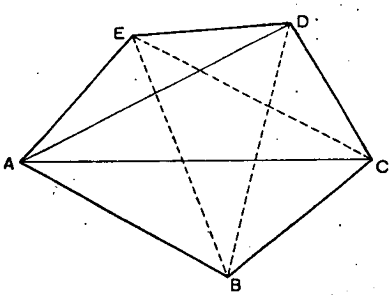


Fig. 2.

Gehen wir zum *Fünfeck* über, so ist dieses bestimmt durch die 5 Seiten und die beiden von irgend einer Ecke ausgehenden Diagonalen, etwa AD und AC (Fig. 2). Die gegebenen Stücke sind ausgezogen, die gesuchten gestrichelt. Die Anwendung unserer Formel auf das Viereck ABCD ergibt die Diagonale BD; ABDE liefert BE, und ACDE liefert CE. Wir haben also im Fünfeck drei Beziehungen zwischen Seiten und Diagonalen, die wir jederzeit aus der Vierecksformel ableiten können. Wir übertragen diese Überlegung auf das *n-Eck*. Dieses ist durch die *n* Seiten und die

$(n-3)$ von einer Ecke ausgehenden Diagonalen bestimmt. Da die Anzahl der Diagonalen $\frac{n(n-3)}{1.2}$ ist, so müssen

$$\frac{n(n-3)}{1.2} - (n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Bedingungsgleichungen erfüllt sein, mit deren Hilfe wir auf grund unserer Vierecksformel die fehlenden Diagonalen bestimmen können.

Es soll jetzt die Beziehung hergestellt werden, die sämtliche Seiten und Diagonalen des n-Ecks umfasst. Wenn wir in einem solchen Vieleck die Diagonalen ziehen, so entsteht eine Reihe von Vierecken, in denen zwei gegenüberliegende Seiten gleichzeitig n-Ecksseiten sind. Uber jeder n-Ecksseite ($n > 4$) liegen aber 2 Vierecke, in denen 3 Seiten n-Ecksseiten sind; es sind dies die Randvierecke z.B. (Fig. 3) $P_1P_2P_3P_4$ und $P_1P_2P_{n-1}P_n$. Fallen P_4 und P_{n-1} zusammen, so haben wir ein Fünfeck. In einem solchen liegen also über P_1P_2 insgesamt 2 Vierecke. Verbinden wir P_4 mit P_{n-1}, so entsteht der Fall des Sechsecks, und es tritt ein weiteres Viereck auf, nämtlich $P_1P_2P_4P_{n-1}$. Haben wir ein Siebeneck, so muss zwischen P_4 und P_{n-1} noch eine Ecke liegen. Es liegen dann über P_1P_2 4 Vierecke u.s.w. Beim n-Eck liegen also über P_1P_2 $(n-3)$ derartige Vierecke. Bei allen n Seiten haben wir mithin insgesamt $\frac{n(n-3)}{1.2}$ Vierecke zu verzeichnen, also gerade so viele, wie das Vieleck Diagonalen hat. In jedem dieser Vierecke müssen wir nun die 7 Verankerungen vornehmen, wie sie unsere Vierecksformel verlangt, also im ganzen $\frac{7n(n-3)}{1.2}$. Da bei der Vierecksformel links 3, rechts 4 Verankerungen vorkommen, so haben wir bei der n-Ecksformel links $\frac{3n(n-3)}{1.2}$, rechts $\frac{4n(n-3)}{1.2}$ Verankerungen.

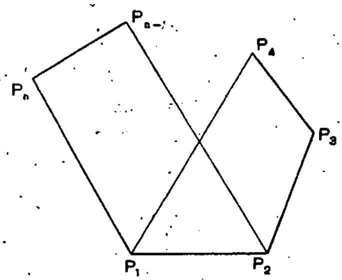


Fig. 3.

Als Beispiel wählen wir das Siebeneck. Hier kommen 14 Vierecke für uns in Betracht, also 98 Verankerungen, von denen 42 auf die linke, 56 auf die rechte Seite der endgültigen Formel entfallen. Die Verankerungslinien der linken Seite sind in Figur 4 gestrichelt, die der rechten Seite punktiert. Man achte besonders darauf, wie viele

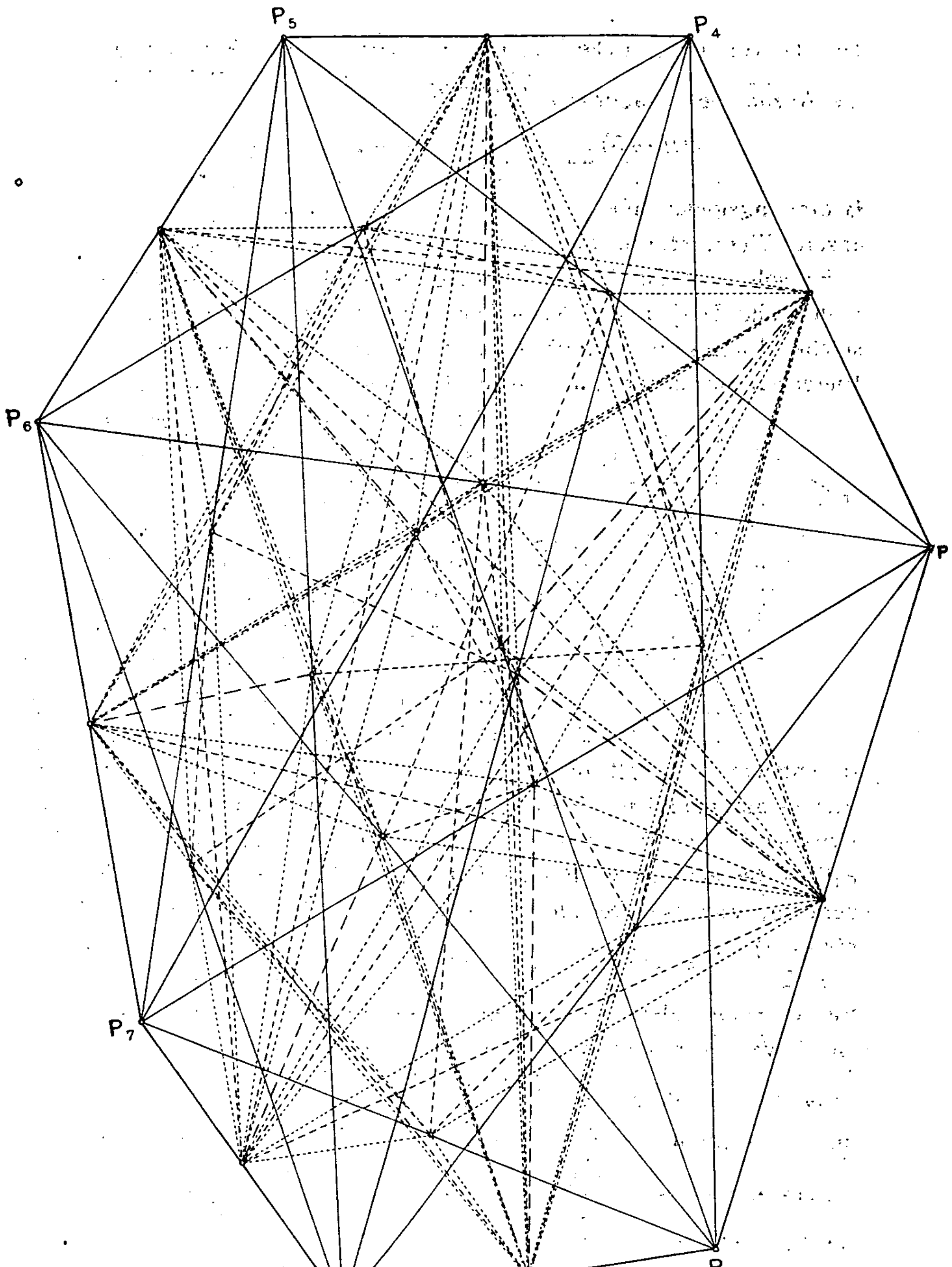


Fig. 4.

Linien von jeder Art in den Seitenmitten münden. Die 14 Gleichungen lauten jetzt in der oben festgesetzten symbolischen Bezeichnung:

$$(P_1P_2,\ P_3P_4)^2 + (P_1P_3,\ P_2P_4)^2 + \underline{(P_1P_4,\ P_2P_3)^2} = (P_1P_2,\ P_2P_4)^2 + (P_2P_1,\ P_1P_3)^2 + (P_3P_4,\ P_4P_2)^2 + (P_4P_3,\ P_3P_1)^2$$

$$(P_1P_2,\ P_4P_5)^2 + (P_1P_4,\ P_2P_5)^2 + (P_1P_5,\ P_2P_4)^2 = (P_1P_2,\ P_2P_5)^2 + (P_2P_1,\ P_1P_4)^2 + (P_4P_5,\ P_5P_2)^2 + (P_5P_4,\ P_4P_1)^2$$

$$(P_1P_2,\ P_5P_6)^2 + (P_1P_5,\ P_2P_6)^2 + (P_1P_6,\ P_2P_5)^2 = (P_1P_2,\ P_2P_6)^2 + (P_2P_1,\ P_1P_5)^2 + (P_5P_6,\ P_6P_2)^2 + (P_6P_5,\ P_5P_1)^2$$

$$(P_1P_2,\ P_6P_7)^2 + (P_1P_6,\ P_2P_7)^2 + \underline{(P_1P_7,\ P_2P_6)^2} = (P_1P_2,\ P_2P_7)^2 + (P_2P_1,\ P_1P_6)^2 + (P_6P_7,\ P_7P_2)^2 + (P_7P_6,\ P_6P_1)^2$$

$$(P_2P_3,\ P_4P_5)^2 + (P_2P_4,\ P_3P_5)^2 + \underline{(P_2P_5,\ P_3P_4)^2} = (P_2P_3,\ P_3P_5)^2 + (P_3P_2,\ P_2P_4)^2 + (P_4P_5,\ P_5P_3)^2 + (P_5P_4,\ P_4P_2)^2$$

$$(P_2P_3,\ P_5P_6)^2 + (P_2P_5,\ P_3P_6)^2 + (P_2P_6,\ P_3P_5)^2 = (P_2P_3,\ P_3P_6)^2 + (P_3P_2,\ P_2P_5)^2 + (P_5P_6,\ P_6P_3)^2 + (P_6P_5,\ P_5P_2)^2$$

$$(P_2P_3,\ P_6P_7)^2 + (P_2P_6,\ P_3P_7)^2 + (P_2P_7,\ P_3P_6)^2 = (P_2P_3,\ P_3P_7)^2 + (P_3P_2,\ P_2P_6)^2 + (P_6P_7,\ P_7P_3)^2 + (P_7P_6,\ P_6P_2)^2$$

$$(P_2P_3,\ P_7P_1)^2 + (P_2P_7,\ P_3P_1)^2 + \underline{(P_2P_1,\ P_3P_7)^2} = (P_2P_3,\ P_3P_1)^2 + (P_3P_2,\ P_2P_7)^2 + (P_7P_1,\ P_1P_3)^2 + (P_1P_7,\ P_7P_2)^2$$

$$(P_3P_4,\ P_5P_6)^2 + (P_3P_5,\ P_4P_6)^2 + \underline{(P_3P_6,\ P_4P_5)^2} = (P_3P_4,\ P_4P_6)^2 + (P_4P_3,\ P_3P_5)^2 + (P_5P_6,\ P_6P_4)^2 + (P_6P_5,\ P_5P_3)^2$$

$$(P_3P_4,\ P_6P_7)^2 + (P_3P_6,\ P_4P_7)^2 + (P_3P_7,\ P_4P_6)^2 = (P_3P_4,\ P_4P_7)^2 + (P_4P_3,\ P_3P_6)^2 + (P_6P_7,\ P_7P_4)^2 + (P_7P_6,\ P_6P_3)^2$$

$$(P_3P_4,\ P_7P_1)^2 + (P_3P_7,\ P_4P_1)^2 + (P_3P_1,\ P_4P_7)^2 = (P_3P_4,\ P_4P_1)^2 + (P_4P_3,\ P_3P_7)^2 + (P_7P_1,\ P_1P_4)^2 + (P_1P_7,\ P_7P_3)^2$$

$$(P_4P_5,\ P_6P_7)^2 + (P_4P_6,\ P_5P_7)^2 + \underline{(P_4P_7,\ P_5P_6)^2} = (P_4P_5,\ P_5P_7)^2 + (P_5P_4,\ P_4P_6)^2 + (P_6P_7,\ P_7P_5)^2 + (P_7P_6,\ P_6P_4)^2$$

$$(P_4P_5,\ P_7P_1)^2 + (P_4P_7,\ P_5P_1)^2 + (P_4P_1,\ P_5P_7)^2 = (P_4P_5,\ P_5P_1)^2 + (P_5P_4,\ P_4P_7)^2 + (P_7P_1,\ P_1P_5)^2 + (P_1P_7,\ P_7P_4)^2$$

$$(P_5P_6,\ P_7P_1)^2 + (P_5P_7,\ P_6P_1)^2 + \underline{(P_5P_1,\ P_6P_7)^2} = (P_5P_6,\ P_6P_1)^2 + (P_6P_5,\ P_5P_7)^2 + (P_7P_1,\ P_1P_6)^2 + (P_1P_7,\ P_7P_5)^2$$

Diese Gleichungen sind nun zu addieren. Dann bilden die so entstandenen Summen die Gleichung, die zwischen den Seiten und Diagonalen eines Siebenecks besteht. Der Raumersparnis wegen wollen wir sie nicht besonders hinschreiben. Sehen wir uns nun die einzelnen Gleichungen noch einmal an, so finden wir an erster Stelle links die Quadrate der Mittenverankerungen aller Seiten mit den nicht an sie anstossenden Seiten. Die unterstrichenen an dritter Stelle links stehenden Glieder sind die Quadrate der Mittenverankerungen derjenigen Diagonalen, die Seiten von Randvierecken sind, mit den ihnen gegenüberliegenden Randvierecksseiten. Die übrig bleibenden Glieder an dritter Stelle und die Glieder an zweiter Stelle links sind endlich die Quadrate der Mittenverankerungen von Diagonalen untereinander. Die auf der rechten Seite stehenden insgesamt 56 Glieder sind die Quadrate der Mittenverankerungen der sämtlichen Seiten mit den von ihren Endpunkten ausgehenden Diagonalen. Jede Seite kommt achtmal vor, z.B. P_1P_2 wird verankert mit P_2P_4, mit P_2P_5, mit P_2P_6, mit P_2P_7 und mit P_1P_3, mit P_1P_4, mit P_1P_5, mit P_1P_6.

Wir erhalten nun den für das *Siebeneck,* aber auch allgemein für das *n-Eck* geltenden Satz:

„Zieht man in einem Siebeneck die Diagonalen und verankert in allen so entstandenen Vierecken, in denen zwei gegenüberliegende Seiten gleichzeitig Seiten des Siebenecks sind, die gegenüberliegenden Seiten und auch die Diagonalen, so ist die Summe der Quadrate dieser Mittenverankerungen gleich der Summe der Quadrate der Mittenverankerungen jeder Seite mit allen von ihren Endpunkten ausgehenden Diagonalen."

Ist $P_xP_{x+1}P_yP_{y+1}$, wobei $y \geqq x+2 \pmod{n}$, eins unserer Vierecke im n-Eck, so heisst für dieses der Mittenverankerungssatz:

$$(P_xP_{x+1}, P_yP_{y+1})^2 + (P_xP_y, P_{x+1}P_{y+1})^2 + (P_xP_{y+1}, P_{x+1}P_y)^2 = (P_xP_{x+1}, P_{x+1}P_{y+1})^2 + (P_{x+1}P_x, P_xP_y)^2 + (P_yP_{y+1}, P_{y+1}P_{x+1})^2 + (P_{y+1}P_y, P_yP_x)^2.$$

Lassen wir jetzt x alle Werte von 1 bis $(n-2)$ annehmen und ordnen jedem Werte von y gemäss $y \geqq x+2 \pmod{n}$ zu, wobei wir nur darauf Bedacht zu nehmen haben, dass zwei anstossende Seiten nicht verankert werden dürfen und auch keine Verankerungen mehrfach auftreten, so ist

$$\sum_{1}^{n-2} x \{(P_xP_{x+1},\ P_yP_{y+1})^2 + (P_xP_y, P_{x+1}P_{y+1})^2 + (P_xP_{y+1},\ P_{x+1}P_y)^2\} =$$

$$\sum_{1}^{n-2} x \{(P_xP_{x+1},\ P_{x+1}P_{y+1})^2 + (P_{x+1}P_x,\ P_xP_y)^2 + (P_yP_{y+1},\ P_{y+1}P_{x+1})^2 + (P_{y+1}P_y,\ P_yP_x)^2\}$$

die Gleichung, die zwischen den Seiten und Diagonalen eines ebenen n-Ecks besteht.

Für die Schulmathematik kommen hauptsächlich die *regelmässigen* Vielecke in Betracht. Hier tritt eine Reihe von Vereinfachungen auf.

So verteilen sich z.B. die 35 Verankerungsstrecken des allgemeinen Fünfecks in diesem Falle auf 10 Linien, die 63 des Sechsecks schrumpfen zu dreien zu Null zusammen, die übrigen 60 verteilen sich auf 12 Linien. Zeichnen wir in regelmässigen Vielecken die Verankerungslinien, die von der linken Seite unserer Gleichungen herkommen, etwa rot, die von der rechten herkommenden etwa blau und nehmen dort, wo es nötig ist, Doppellinien, so erhalten wir ganz eindrucksvolle Figuren.

Für die Berechnung genügt es freilich beim regelmässigen Vieleck, dass wir nur die über *einer* Seite liegenden Vierecke ins Auge fassen, also statt $\frac{n(n-3)}{2}$ nur noch $(n-3)$. Ist n eine ungerade Zahl, so kommen nur noch $\frac{n-3}{2}$ Diagonalen in Betracht. Ist n gerade, so ist eine Diagonale gleich dem Durchmesser des Umkreises, und es bleiben noch $\frac{n-4}{2}$ Diagonalen übrig.

Zum Schlusse seien noch die für das regelmässige Fünfeck, Sechseck, Achteck und Zehneck geltenden Beziehungen zwischen den Seiten (s) und den Diagonalen (d) aufgestellt:

$$d^2 = \frac{s_5^2(3+\sqrt{5})}{2},$$

$$s_6^2 + d_2^2 = d_1^2,$$

$$s_8^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{3}{2} d_1^2,$$

$$s_{10}^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 2d_1^2.$$

Dabei sind die d_1 immer diejenigen Diagonalen, die Durchmesser des um das betreffende Vieleck beschriebenen Kreises sind.

OPMERKINGEN OVER DE WISKUNDIGE VAKTAAL

DOOR

J. H. SCHOGT.

Reeds eenigen tijd geleden heb ik het plan opgevat, om enkele opmerkingen over de Nederlandsche wiskundige vaktaal te publiceeren; de uitvoering van dit plan is zeer vergemakkelijkt door de verschijning van de „Woordenlijst van de Nederlandsche wiskundige vaktaal," samengesteld vanwege den Vlaamschen Leeraarsbond O(ns) M(iddelbaar) O(nderwijs). (Zie mijne bespreking van deze lijst in Euclides IX, bldz. 174). Door de groote volledigheid dezer lijst is het nl. voldoende, de daarin voorkomende woorden een voor een na te gaan, en mogelijke opmerkingen neer te schrijven. Deze eenvoudige werkwijze zal ik dan ook volgen, mij beperkende tot de onderwerpen, die binnen het leerplan der hoogere burgerschool vallen.

Zooals uit het volgende zal blijken, zijn mijne opmerkingen van verschillenden aard. In enkele gevallen zijn zij van zuiver aesthethischen aard, in andere betreffen zij de bepaling der door de termen uitgedrukte begrippen. De nauwe samenhang tusschen terminologie en didactiek zal mij vaak op onderwijskundig terrein brengen, en bij gelegenheid hoop ik eenige opmerkingen te maken over notaties.

Ik vlei mij met de hoop, dat enkele lezers van dit tijdschrift mijn artikel met eenige belangstelling zullen lezen en er stof tot nadenken in vinden; eenig practisch resultaat, in den vorm van verbetering van ons wiskunde-onderwijs door verdieping van taalbezinning, verwacht ik er natuurlijk niet van.

§ 1. *Omgekeerde, tegengestelde.* Is de oorspronkelijke stelling:

$$\text{uit A volgt B} \qquad (1)$$

dan is het (een) omgekeerde

$$\text{uit B volgt A} \qquad (2)$$

Voor de stelling

uit niet-B volgt niet-A (3)

lijkt mij de benaming *contrapositie* te verkiezen boven „logische omkeering"; de stelling

uit niet-A volgt niet-B (4)

(omgekeerde van (3), contrapositie van (2)) kan men geschikt aanduiden als *contrarium* of „tegenstelling" van (1).

§ 2. *Associativiteit* enz. De associativiteit in haar eenvoudigsten vorm luidt b. v. voor de optelling

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

men laat de haakjes weg, en schrijft $a + b + c$.

De z.g. algemeene associatieve eigenschap zegt, dat b. v.

$$a + b + c + d + e + f = a + (b + c) + d + (e + f) \quad (1)$$

hetgeen eigenlijk beteekent

$$([\{(a + b) + c\} + d] + e) + f = [\{a + (b + c)\} + d] + (e + f)$$

Onder *dissociatieve eigenschap* wordt gewoonlijk verstaan

$$a + (b + c) + d + (e + f) = a + b + c + d + e + f \quad (2)$$

Het lijkt mij niet gewenscht, (1) en (2) verschillende eigenschappen te noemen; ik spreek bij mijn onderwijs van *associatief* en *dissociatief gebruik* der *associatieve eigenschap.*

Belangrijker dan bij de associativiteit is het dubbele gebruik bij distributieve eigenschappen. Beschouw als voorbeeld de distributiviteit van de vermenigvuldiging t. o. v. de optelling:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Hier wordt de eigenschap gebruikt om de vermenigvuldiging over de termen der optelling te verdeelen, dus *distributief gebruikt.* Schrijft men echter

$$ab + ac = a(b + c)$$

dan worden de vermenigvuldigingen tot één samengedreven, ik zou dit *compulsief gebruik* der distributieve eigenschap willen noemen. [1])

---

[1]) Een mijner leerlingen heeft hiervoor den term „fiscaal gebruik" voorgesteld.

§ 3. *Transitiviteit.* Wanneer eene transitieve betrekking tusschen meer dan twee getallen (o. d.) bestaat, gebruikt men eene afkortende schrijfwijze; b. v.

$$a > b \qquad b > c \qquad c > d \qquad d > e$$

wordt afgekort tot

$$a > b > c > d > e;$$

de betrekking $>$ bestaat dan tusschen elke twee elementen in de volgorde waarin zij zijn neergeschreven, b. v. $b > d$. Dat dit zoo is, berust juist op de transitiviteit der betrekking.

M. i. moet de schrijfwijze

$$a \neq b \neq c$$

ten sterkste worden afgekeurd. Aaneengeschakelde schrijfwijzen, waarin meer dan éène betrekking optreedt, behoeven niet tot onduidelijkheden te leiden:

$$a = b > c \geqq d = e$$

Maar ik kan ze niet bewonderen.

§ 4. *Rekenkunde, algebra, analyse.* Welke onderwerpen tot de rekenkunde, welke tot de algebra behooren zal wel niemand nauwkeurig kunnen aangeven. Hier te lande probeert men het nog al eens zóó: de algebra begint, waar de negatieve getallen worden ingevoerd[1]) (maar brengt dan soms de logarithmen onder bij rekenkunde) of wel, men zoekt het karakteristieke van de rekenkunde daarin, dat de getallen uitsluitend met behulp van cijfers worden uitgedrukt (maar wil dan toch algemeene resultaten formuleeren en algemeene redeneeringen houden). Een Fransche Cours d'Algèbre geeft geheel andere onderwerpen dan een Duitsch algebraboek. Onderwerpen als varianten en limieten behooren in Frankrijk tot de Algèbre, in Duitschland tot de Analysis.

De begripsinhouden van de woorden „rekenkunde" en „algebra" varieeren dus, van land tot land, zelfs van school tot school. Is het mogelijk en wenschelijk, ze nauwkeurig vast te leggen? Mogelijk misschien wel, maar wenschelijk zeker niet. Dat beide te zamen

---

[1]) Vandaar de ongelukkige benaming „algebraïsche getallen", zie § 12.

één vak vormen, behoort zoo spoedig mogelijk officieel erkend te worden, doordat men de splitsing in „rekenkunde" en „algebra" van de programma's doet verdwijnen en geen afzonderlijke boeken voor deze twee onderdeelen meer gebruikt. Daarbij moet men dan de dwaze fictie niet volhouden, dat de leerlingen bij hunne intrede in de middelbare school de hoofdbewerkingen „reeds kennen", hunne talrijke fouten bewijzen immers het tegendeel.

Bij mijn onderwijs gebruik ik den aan de rapportboekjes ontleenden term: „reken- en stelkunde".

§ 5. *Grootheid.* Dit woord behoort m. i. niet thuis in de theoretische reken- en stelkunde, maar in de toepassingen op meetkundige of niet zuiver wiskundige problemen (natuurkunde, e. d.). Grootheden zijn begrippen waaraan op eene of andere wijze getallen kunnen worden toegevoegd, niet die getallen zelf. Het lijkt mij dan ook verkeerd, om, b. v. bij de theoretische behandeling van functies, „veranderlijke" en „veranderlijke grootheid" als synoniem te gebruiken.

§ 6. *Ilatieteeken.* Het is mij nimmer gelukt, de afleiding van dit woord op te sporen; men ziet het steeds met éénе *l* gespeld. Kan iemand mij inlichten?

§ 7. *Verschil.* De uitdrukkingen

het verschil van (of „tusschen") a en b is c

a en b verschillen c

beteekenen in de taal van het dagelijksch leven

$$|a - b| = c$$

In de wiskundige taal wordt met het verschil somtijds bedoeld $a - b$ of $b - a$, zonder dat duidelijk blijkt, welke van de twee uitdrukkingen gemeend wordt.

Dit kan tot moeilijkheden aanleiding geven, vooral voor de leerlingen. B. v. bij de oplossing van dit vraagstuk (ontleend aan een bekend leerboek):

„Er is een getal van drie cijfers; het cijfer van de tientallen is 4 meer dan dat van de honderdtallen. Keert men de volgorde van de cijfers om, dan is het verschil tusschen het nieuwe getal en het oorspronkelijke 79 minder dan het oorspronkelijke getal. Indien

nog gegeven is, dat de som van de cijfers 16 is, vraagt men het gevraagde(!) getal te berekenen."

Eerst bij de berekening blijkt, dat met het verschil bedoeld wordt: het nieuwe getal verminderd met het oorspronkelijke.

Mijns inziens moet het woord „verschil" dus met omzichtigheid gebruikt worden.

§ 8. *Quotient.* Omtrent het woord „quotient" zijn soortgelijke opmerkingen te maken als in § 7 omtrent „verschil" geschied is.

Daarbij komt echter nog iets: het woord quotient heeft in berekeningen binnen het gebied der natuurlijke (of geheele) getallen soms eene andere beteekenis dan bij berekeningen in het gebied der rationale getallen (of in ruimere gebieden). Het quotient bij deeling van 13 door 5 is nu eens het rationale getal $2^3/_5$, dan weer het natuurlijke getal 2. Het lijkt mij wenschelijk voor quotienten in deze laatste beteekenis een afzonderlijken term in te voeren, maar welk woord men daarvoor zou moeten kiezen, weet ik niet.

§ 9. *Gewone breuk.* Deze term beteekent blijkbaar iets anders dan „echte breuk" (kleiner dan 1 in absolute waarde) en dan „eigenlijke breuk" (niet vereenvoudigbaar tot een geheel getal); ik vermoed dat de „gewone" breuken eene tegenstelling vormen tot de „tiendeelige", zoodat dus $^4/_5$ eene gewone breuk is en 0,8 eene tiendeelige.

Dit lijkt mij eene ongelukkige onderscheiding; men kan toch moeilijk volhouden dat 0,8 eene andere breuk is dan $^4/_5$. Daarbij komt nog dat men gewoonlijk de zeer begrijpelijke en voor de hand liggende bepaling geeft: eene tiendeelige breuk is eene breuk, waarvan de noemer eene macht van 10 is (of eene breuk die herleid kan worden tot eene met eene macht van 10 als noemer). Op grond van deze bepaling is $^4/_5$ eene tiendeelige breuk. Men zou moeten spreken van breuken in de *tiendeelige schrijfwijze* (0,8); de andere schrijfwijze de „gewone" te noemen is eigenlijk niet te verdedigen, daar zij niet gewoner is dan de tiendeelige, men zou haar de *tweeledige* kunnen noemen.

§ 10. *Vereenvoudigen van breuken.* Wanneer men streeft naar korte formuleeringen gevoelt men somtijds het gemis van een naam voor de tegengestelde bewerking van vereenvoudiging eener

breuk ($^3/_4 \rightarrow {}^{15}/_{20}$; einen Bruch erweitern). Wie stelt eene geschikte benaming voor?

§ 11. *Termen eener evenredigheid,* enz. Als men zich veel moeite gegeven heeft, aan beginnelingen het onderscheid tusschen „termen" en „factoren" in te prenten, is het altijd eenigszins onaangenaam, om den naam van termen te moeten geven aan dingen, die met termen niets te maken hebben. Ik zie echter voorloopig geen betere benaming voor de „termen eener evenredigheid."

Natuurlijk zou men de terminologie kunnen vereenvoudigen door, zooals trouwens reeds veelal gedaan wordt, het woord „meetkundig" voor „evenredigheid" en „middenevenredige" weg te laten en de termen „rekenkundig middenevenredige" (voor „gemiddelde") en „rekenkundige evenredigheid" af te schaffen.

§ 12. *Algebraische getallen.* Deze uitdrukking heeft, zooals bekend is [1]) in de wiskunde eene bepaalde beteekenis; daar het niet gewenscht is, haar in de schoolwiskunde in eene geheel andere beteekenis te gebruiken, moet de uitdrukking „algebraische getallen" uit de schoolwiskunde verdwijnen, en daarmede natuurlijk ook „rekenkundige getallen". Het is niet noodig, hiervoor andere woorden te bedenken, daar deze begrippen bij de stelselmatige uitbreiding van het getallengebied geen rol spelen.

De uitdrukkingen „rekenkundige wortels" en „algebraische wortels" kunnen dan meteen verdwijnen.

§ 13. *Complexe getallen.* Herhaaldelijk is er op gewezen, hoe ongelukkig de benaming „imaginair getal" is, daar deze benaming suggereert, dat deze soort getallen denkbeeldiger is dan andere soorten. Een dergelijk bezwaar kan natuurlijk tegen de benaming „reëele getallen" worden ingebracht.

Men verkrijgt vanzelf eene eenigszins betere terminologie, als men bij de invoering der complexe getallen den modernen weg volgt (zie b.v. Beth en Wijdenes, Nieuwe School-algebra IV, bladz. 102, e.v.).

Een complex getal is dan een geordend paar reëele getallen, ik noem deze *den eersten* en *den tweeden component* van het complexe

---

[1]) Zie de opmerkingen van Prof. Schuh, in Euclides IV, bladzijde 202.

getal. Complexe getallen welker tweede component nul is zijn gelijk aan reëele getallen; het lijkt mij niet noodig, voor complexe getallen waarvan de eerste component nul is, eene afzonderlijke benaming in te voeren. De benaming „reëele getallen" zou ik willen behouden (daar ik niets beters weet te bedenken); complexe getallen waarvan de tweede component van nul verschilt, zou men niet-reëele complexe getallen kunnen noemen. De benaming „imaginair" kan verdwijnen, evenals de bijzonder ongelukkige Nederlandsche benamingen „bestaanbaar" en „onbestaanbaar".

§ 14. *Getalwaarde, getalcoefficiënt.* Het lijkt mij onjuist, door het voorvoegsel „getal-" aan te duiden, dat iets in cijfers is uitgedrukt; immers getallen kunnen ook door letters worden aangegeven. Als tegenstelling tot „lettercoefficiënt" zou men *cijfercoefficiënt* moeten gebruiken, niet „getal(len)coefficiënt".

§ 15. *Gelijkheid, identiteit, enz.* Wanneer men onderscheid maakt in het gebruik der teekens $=$ en $\equiv$, wordt dit gewoonlijk zoo voorgeschreven dat het eerste teeken moet staan tusschen twee uitdrukkingen die hetzelfde getal voorstellen:

$$2 + 3 = 5$$

$$\text{als } a = 2 \text{ dan is } 3a + 1 = 7$$

(men noemt zulk eene betrekking eene *gelijkheid*) terwijl het tweede teeken moet aanduiden, dat de beide uitdrukkingen, die het verbindt, voor willekeurige waarden der daarin voorkomende letters gelijke getallen voorstellen:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

(*identiteit*). Zooals bekend is, wordt dit echter allerminst consequent toegepast, anders zou men bij gewone herleidingen steeds het teeken $\equiv$ moeten gebruiken. In het gebruik van het teeken $\equiv$ heerscht eene groote mate van willekeur, die ik niet beschrijven kan. Daar deze willekeur algemeen en internationaal is, zal er wel niet veel tegen te doen wezen; er zou anders, van onderwijsstandpunt bekeken, wel wat voor te zeggen zijn, zich aan bovenstaanden regel te houden. Men kan b. v. zeggen, dat de bewering

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2$$

fout is, terwijl men van

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

alleen maar kan zeggen, dat ze gewoonlijk fout is (nl. als a en b beide van nul verschillen).

Over het gebruik van het teeken $=$ in vergelijkingen zie § 16.

Over het gebruik van het woord „gelijk" in de meetkunde zal later worden gesproken.

§ 16. *Vergelijking.* Het woord „vergelijking" wordt tegenwoordig gebruikt in twee sterk verschillende beteekenissen, die, juist doordat zij zóó sterk verschillen, weinig aanleiding tot verwarring geven. (Slaat men ouderwetsche boeken op, dan treft men een veel uitgebreider gebruik van het woord aan; betrekkingen van allerlei aard worden als vergelijkingen betiteld). In deze paragraaf zal over de „vergelijkingen" der analytische meetkunde niet worden gesproken.

Gaat men na, waarin het verschil tusschen vergelijkingen (identieke en valsche daaronder begrepen) en gelijkheden gelegen is, dan blijkt het een verschil in modaliteit te zijn. Gelijkheden zijn beweringen, staan in den indicativus; vergelijkingen zijn opgaven, staan in den imperativus. Deze eenvoudige opmerking lijkt mij onontbeerlijk voor een juist inzicht in het wezen der vergelijkingen. Maar in terminologie en notatie komt zij in het geheel niet tot uitdrukking, want:

zoowel bij gelijkheden als bij vergelijkingen wordt hetzelfde teeken $=$ gebruikt,

zoowel bij gelijkheden als bij vergelijkingen wordt dit teeken uitgesproken als: [is] gelijk aan (indicativus).

Ik acht dit een bezwaar, zoo ernstig en zoo belemmerend voor het verkrijgen van een juist begrip, dat ik bij mijn onderwijs getracht heb, het te ondervangen door een ander gelijkteeken voor vergelijkingen in te voeren, namelijk $\doteq$[1]), en dit niet uit te spreken als „(is) gelijk aan". Het beste zou wezen,

$$x^2 + 7x + 12 \doteq 0$$

uit te spreken als een zin in den imperativus:

bepaal de waarde(n) van x, zoodat $x^2 + 7x + 12$ de waarde nul aanneemt. Daar dit echter, vooral in herhalingen, wat lang-

---

[1]) Later is mij gebleken dat hetzelfde teeken in dezelfde beteekenis voorkomt in Höhere Algebra van H. Hasse.

dradig is, laat ik het teeken $\doteq$ uitspreken als: *„moet gelijk zijn aan"* of *„moet de waarde* [nul] *aannemen"*.

Ik geloof, dat ik op deze wijze eenig voordeel bereik door een juister inzicht aan te kweeken; de leerlingen komen niet zoo licht in de verleiding om bij het zien van b. v.

$$x^2 + 5x + 3 \doteq -2x - 9$$
$$x^2 + 7x + 12 \doteq 0$$
$$(x + 3)(x + 4) \doteq 0$$

enz. elken regel als eene bewering en elken volgenden regel als eene gevolgtrekking uit den voorgaanden op te vatten, wat m. i. verkeerd is.

Het anders zoo moeilijk bij te brengen verschil tusschen eene gelijkheid en eene identieke vergelijking wordt nu gemakkelijk formuleerbaar: de eerste is eene bewering, de andere een vraag met een bijzonder eenvoudig antwoord.

§ 17. *Identiek,* enz. De van ouds bekende onderscheiding der vergelijkingen in identieke, niet-identieke en valsche heeft reeds zooveel aanleiding tot vermaak en spotternij gegeven, dat men zich moeilijk kan begrijpen, hoe eene zoo dwaze terminologie, waarbij niet-*a* iets anders beteekent dan de ontkenning van *a*, thans nog gebruikt wordt. Voor vergelijkingen, die in het gewone geval verkeeren, is eene nieuwe benaming noodig; mij lijkt „gewoon" een geschikt woord.

Er is naar aanleiding van den term „identiek" nog eene andere opmerking te maken. Bij bovenbedoelde onderscheiding heeft men klaarblijkelijk gedacht aan vergelijkingen, die men verkrijgt door een geheelen veelterm als eerste lid te nemen (en als tweede lid nul); in de schoolwiskunde komen echter ook de „vergelijkingen met breuken" voor, die, wanneer men nauwkeurig redeneert (de meeste leerboeken doen dit niet) tot allerlei moeilijkheden aanleiding geven. [1]) Bij deze vergelijkingen geldt nu niet meer, dat het aantal oplossingen nul bedraagt, of een eindig aantal, terwijl als derde mogelijkheid alle getallen (van het getallengebied waarin men werkt) voldoen. Uit de identieke vergelijking

$$5x \doteq 2x + 3x$$

[1]) Zie b. v. mijn artikeltje over „Een paar moeilijke algebravraagstukken" in Euclides IX, bldz. 123.

kan men door aan beide leden dezelfde gebroken termen toe te voegen, vergelijkingen afleiden, die alle getallen, op één of meer na, als oplossingen toelaten:

$$5x + \frac{1}{x-3} \doteq 2x + 3x + \frac{1}{x-3}$$

$$5x + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} \doteq 2x + 3x + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$$

enz. Identiek zijn deze vergelijkingen niet, valsch natuurlijk evenmin; men zou ze dus onder de gewone moeten rangschikken, terwijl ze toch, wat de verzameling der oplossingen betreft, hier lijnrecht tegenover staan. Men zou ze *bijna-identiek* kunnen noemen, en dus deze bepaling geven:

Eene vergelijking (met ééne onbekende) heet bijna identiek, als alle getallen, met uitzondering van eene eindige verzameling, eraan voldoen.

Hiertegen kan als bezwaar worden ingebracht, dat men, door geschikte functies aan beide leden eener identieke vergelijking toe te voegen (b. v. tg $(\alpha x + \beta)$) vergelijkingen kan construeeren, waaraan alle getallen voldoen met uitzondering van eene oneindige verzameling. Hoe zou men die dan moeten noemen? *Semi-identiek?* De consequentie zou wezen: eene indeeling naar de structuur van de verzameling der oplossingen, maar dat is een vraagstuk dat zeker buiten het terrein der schoolwiskunde valt.

§ 18. *Veranderlijken en onbekenden.* Wanneer men zich de opgave stelt, de termen „veranderlijke", „onbekende" en „wortel (eener vergelijking)" zoo in korte zinnen te definieeren, dat het onderscheid duidelijk blijkt, geraakt men bij het woord „onbekende" in moeilijkheden; men kan m. i. niet veel anders doen, dan de bedoeling door omschrijving benaderen.

Er zijn twee opvattingen omtrent vergelijkingen (met ééne onbekende). De moderne beschouwt de leden der vergelijking

$$2x^2 + 5x + 3 \doteq x^2 - 2x - 9$$

elk als eene functie der *veranderlijke x* (eene *veranderlijke* is een teeken, waaraan men verschillende getallen als „waarden" kan toekennen, maar is zelf geen getal [1]), en beschouwt de vergelijking

[1]) De consequentie van dit standpunt is, dat men optelling, vermenigvuldiging enz. van veranderlijken moet definieeren, en de eigenschappen dezer bewerkingen onderzoeken. Zie § 26.

als *opgave* (zie § 16), te bepalen bij welke waarde(n) van die veranderlijke de functiewaarden van beide leden gelijk zijn. Deze waarden van de veranderlijke noemt men de *wortels* of oplossingen der vergelijking.

Men zou eigenlijk moeten spreken van eene *vergelijking van functies van ééne veranderlijke* wat men dan zou kunnen afkorten tot „vergelijking in (of „met") ééne veranderlijke".

Zooals bekend is, doet men dit *niet*, maar spreekt van eene *vergelijking met ééne onbekende*, hetgeen verband houdt met eene oudere opvatting. Daarbij wordt x in

$$2x^2 + 5x + 3 \doteq x^2 - 2x - 9$$

opgevat als een *getal*, dat berekend moet worden, voorloopig door eene letter wordt aangeduid, maar in cijfers behoort te worden uitgedrukt. Voorloopig door eene letter uitgedrukt heet het getal „onbekende", in cijfers uitgedrukt heet het „wortel" der vergelijking. Deze opvatting past volkomen bij gewone vergelijkingen van den eersten graad met ééne onbekende; de onderstelling lijkt mij niet gewaagd, dat zij ontstaan is, toen men in hoofdzaak zulke vergelijkingen beschouwde, en wel met in cijfers uitgedrukte coefficiënten. De meeste leerboeken geven definities, die deze opvatting eenigszins gewijzigd weergeven, maar aan de redeneeringen ligt zij wel ten grondslag.

De oude opvatting heeft m. i. verschillende bezwaren. Dat het onbekende getal meer dan één getal kan blijken te zijn, vind ik niet het gewichtigste, evenmin dat men a priori niet weet of het onbekende getal, dat men zoekt, wel bestaat. Vooral bezwaarlijk vind ik de verkeerde opvatting, die de leerlingen krijgen omtrent het verband, dat er bestaat tusschen de opvolgende regels, waarin men gewoonlijk zonder begeleidenden tekst, de oplossing eener vergelijking neerschrijft (vgl. § 16), vooral als men, zooals alle leerboeken doen, het teeken $=$ gebruikt, en niet $\doteq$.

Deze bezwaren kleven de moderne opvatting niet aan. Maar het kan niet ontkend worden, dat bij de oplossing van ingekleede vraagstukken de moderne opvatting iets gewrongens heeft, en de oude verreweg de natuurlijkste is; hetzelfde geldt bij de vergelijkingen van den eersten graad met ééne onbekende. Vandaar dat, als men zijn onderwijs er niet opzettelijk op inricht, de oude opvatting bij de leerlingen wortel schiet. Wil men dit vermijden, dan kan

men zich niet vereenigen met de zienswijze van hen, die reeds zoo vroeg mogelijk met het oplossen van vergelijkingen en ingekleede vraagstukken willen beginnen, maar moet men het voorschrift in het ontwerp der commissie-Beth waardeeren, dat de behandeling der eenvoudigste vergelijkingen tot de tweede klasse uitstelt.

§ 19. *Getallenvergelijking.* Wil men onderscheid maken tusschen vergelijkingen, welker coefficiënten uitsluitend in cijfers zijn uitgedrukt en vergelijkingen in welker coefficiënten ook letters optreden, en duidt men de laatste door „lettervergelijking" [1]) aan, dan moet men de eerste *cijfervergelijkingen* noemen, niet „getallenvergelijkingen."

De onderscheiding is in België van meer belang dan hier te lande, omdat men daar, naar Fransch voorbeeld, de zoo belangrijke besprekingen (discussies) der lettervergelijkingen niet verwaarloost, hier daarentegen wel (als men afgaat op de overgroote meerderheid der leerboeken).

§ 20. *Biquadratische vergelijking.* Het lijkt mij (evenals de commissie van samenstelling der Woordenlijst) aanbevelenswaardig, den naam *biquadratische vergelijking* te reserveeren voor de vergelijkingen

$$ax^4 + bx^2 + c \doteq 0 \qquad (a \neq 0)$$

§ 21. *Vergelijkingen met meer onbekenden.* De gebruikelijke terminologie inzake vergelijkingen met meer onbekenden is veel te beperkt om alle bijzonderheden, die zich kunnen voordoen, te beschrijven. Ik beperk mij in het volgende tot vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden, omdat van stelsels met meer dan twee onbekenden de theorie niet tot de leerstof der middelbare scholen behoort.

De vergelijking

$$ax + by + c \doteq 0$$

is identiek als iedere waarde van x met iedere waarde van y voldoet; dat is als $a = b = c = 0$, en valsch als bij geen enkele waarde van x eene waarde van y te vinden is, die er eene oplossing mee vormt, dat is als $a = b = 0$, $c \neq 0$. Voor het geval dat $a = 0$,

[1]) Overeenkomstig het voorstel van de commissie van samenstelling der Woordenlijst.

$b \neq 0$ is mij geen naam bekend, terwijl hij toch noodig is. Men moet mij nl. niet tegenwerpen, dat men in dit geval niet met eene vergelijking met twee onbekenden te maken heeft, want bij de bespreking van stelsels vergelijkingen met twee onbekenden komt dit geval wel degelijk voor. De benaming *identiek t. o. v. x* lijkt mij wel geschikt.

Voor het gewone geval, dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$, bestaat voorzoover ik weet evenmin eene algemeen aanvaarde benaming. Het karakteristieke van dit geval is, dat tusschen de waarden van x en de waarden van y, waarmede zij eene oplossing vormen, eene 1-1-verwantschap bestaat; in de andere gevallen is deze verwantschap gedegenereerd of verdwenen. Ik zie echter niet in, hoe men hieruit eene benaming voor dit geval moet afleiden. Men kan de knoop op eenvoudige, doch weinig elegante, wijze doorhakken, door dit geval het „gewone" te noemen.

Een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kan ten aanzien van de vergelijkingen afzonderlijk in 15 gevallen verkeeren; het lijkt mij niet noodig, voor deze 15 gevallen afzonderlijke namen te bedenken. Wil men de (in de Woordenlijst zonder nadere verklaring voorkomende, maar naar ik meen hier te lande niet algemeen in gebruik zijnde) uitdrukking „valsch stelsel" gebruiken, dan moet men die m. i. reserveeren voor een stelsel van twee valsche vergelijkingen; evenzoo zou een „identiek stelsel" een stelsel van twee identieke vergelijkingen kunnen aanduiden.

Afhankelijk is een stelsel in de gevallen, waarin de graphische voorstelling uit twee samenvallende lijnen bestaat, *strijdig* is een stelsel, waarvan de graphische voorstelling uit twee evenwijdige lijnen bestaat. Zoowel afhankelijkheid als strijdigheid kunnen zich voordoen bij stelsels, waarvan beide vergelijkingen gewoon, en waarvan beide vergelijkingen ten opzichte van dezelfde onbekende identiek zijn.

Aanvaardt men deze beschouwing (die, naar ik meen, met de bedoeling van de meeste leerboeken overeenkomt), dan is de bepaling: „een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is strijdig, als er geen oplossing bestaat" onjuist.

§ 22. *Volledige, onvolledige, zuivere vierkantsvergelijking.* Tegen de benamingen volledige, onvolledige en zuivere vierkantsvergelijking heb ik geen bezwaar, maar de onderscheiding lijkt mij

bijzonder onbelangrijk. Zooals men weet, dient zij om de oplossing van de vierkantsvergelijking terug te brengen tot die der zuivere. Uit

$$x^2 \doteq a$$

laat men zonder nadere verklaring volgen, dat de wortels zijn $\sqrt{a}$ en $-\sqrt{a}$. Beredeneert men dit echter, aldus:

$$x^2 - a \doteq 0$$

d. i. $$(x + \sqrt{a})\,(x - \sqrt{a}) \doteq 0$$

is aequivalent met het stelsel der twee vergelijkingen

$$x + \sqrt{a} \doteq 0 \qquad\qquad x - \sqrt{a} \doteq 0$$

dan blijkt de redeneering even goed dadelijk op de volledige vierkantsvergelijking te kunnen worden toegepast.

§ 23. *Valsche vergelijking.* Men noemt eene vergelijking valsch, als er geen getal is, dat eraan voldoet. Nu doet zich direct de vraag voor, of dit niet een relatief begrip is, namelijk afhankelijk van het getallengebied waarin men rekent.

Het antwoord op deze vraag blijkt verschillend te zijn naar gelang men te maken heeft met vergelijkingen van den eersten of van hoogeren graad.

Voor vergelijkingen van den eersten graad is het aldus gesteld: Beperkt men zich tot getallengebieden waarin de deeling door van nul verschillende getallen onbeperkt uitvoerbaar is, en zoekt men de wortels in hetzelfde getallengebied als waartoe de coefficiënten behooren, dan is de voorwaarde voor oplosbaarheid (valschheid, identiteit) in al die getallengebieden gelijkluidend. De voorwaarde voor valschheid der vergelijking

$$ax + b \doteq 0$$

luidt:

$$a = 0,\ b \neq 0\ .$$

onverschillig of men rekent met rationale, reëele of complexe getallen. (Natuurlijk wordt het anders als men zich tot geheele getallen beperkt).

Voor vergelijkingen van hoogeren graad zijn de voorwaarden echter ten duidelijkste afhankelijk van het getallengebied waarin men werkt, zooals men reeds voor vierkantsvergelijkingen direct inziet.

Dr. B. Gonggrijp
N. L. W. A. Gravelaar
J. van de Griend
F. M. Jaeger
P. Jansen
Dr. J. Kors
Prof. Dr. J. C. Kapteyn
J. J. van Laar
C. L. Landré
Prof. G. Mannoury
Dr. P. Molenbroek
H. Offerhaus Ezn.
Prof. Dr. Ch. H. van Os
A. J. van Pesch
Prof. Dr. Jul. Petersen
Dr. O. Postma
Prof. Dr. J. G. Rutgers
Dr. G. Schaake
Prof. Dr. G. Schouten
Dr. D. J. E. Schrek
Prof. Dr. Fred. Schuh
H. Siersma
Th. Stieltjes
Prof. Dr. M. J. van Uven
H. G. A. Verkaart
H. L. Vernhout
J. Versluys
Dr. W. L. van de Vooren
Prof. Dr. Hk. de Vries
W. H. Wisselink
Prof. Dr. R. Weitzenböck
D. B. Wisselink
P. Wijdenes
P. Wijdenes & Dr. D. de Lange
Prof. Dr. J. Wolff
Prof. Dr. W. van der Woude



LEIBNIZ 1646—1716

P. NOORDHOFF
TE GRONINGEN

geeft uit de

WISKUNDIGE WERKEN VAN

Prof. Dr. J. A. Barrau
Prof. Dr. H. Bremekamp
Prof. Dr. L. E. J. Brouwer
C. A. Cikot
Prof. Dr. J. G. v. d. Corput
P. van Geer

z. o. z.

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK VOOR DE EXACTE WETENSCHAPPEN

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

Deel I, 220 blz., gebonden . . . . f 4.50

Deel I H. B. *De ontwikkeling der Grieksche Wiskunde voor Euclides.*

I. Inleiding. — II. Pythagoras en de Pythagoreeërs. — III. Hippokrates van Chios. — IV. Het probleem der Continuïteit. — V. De crisis in de Grieksche wiskunde. — VI. De Phytagoreeërs volgens de hyp. van Trank. — VII. Plato. — VIII. Van Plato tot Euclides. IX. Euclides.

De elementen van Euclides.

I. Grondslagen. — II. De proposities 1—26. — III. De proposities 27—32. — De parallelen-theorie. — IV. De proposities 33—43. — De aequivalentie-theorie. — V. De proposities 44—48. — Aanpassing van oppervlakken en theorema van Pythagoras.

DEEL II, 287 blz., gebonden f 5.75, bij int. f 5.—.

Deel III H. B. *De Elementen van Euclides.*

V II. De oppervlakterekening. — VI III. De Cirkel. — VII IV. Cirkel en Driehoek. Regelmatige veelhoeken. — VIII V. De redentheorie. VIII VI. De meetkundige toepassing der redentheorie. — IX. De drie arithmetische boeken. VII—IX. — X X. Theorie der Irrationaliteiten. — XI XI. Stereometrie. — XII XII. Inhoudsbepalingen. — XIII XIII. Regelmatige veelvlakken. Appendix I. Komen in de Grieksche wiskunde irrationale getallen voor? Appendix II. Uit de geschiedenis van de termen reden (λόγος) en evenredigheid (ἀναλογία). Naamregister.

Dr. H. J. E. BETH

INLEIDING TOT DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE OP HISTORISCHEN GRONDSLAG

212 blz., gebonden . . . . f 4.50

Deel II H. B. I. *Voorgeschiedenis der niet-Euclidische meetkunde.*

Inleiding. — Parallelisme en aequidistantie. — Parallelisme en gelijkvormigheid. — Girolamo Saccheri. — Lambert. — Legendre.

II. *De grondleggers der niet-Euclidische meetkunde.* Lobatschefsky. — Bolyai. — Gauss.

III. *De analytische ruimteleer.* Inleiding. — Riemann. — Beltrami. — Helmholtz. — De ruimteleer van Kant en de mogelijkheid der N. E. Meetkunde.

IV. *De projectieve en gròepentheoretische richting.* Inleiding. — Cayley. — Klein. Sophus Lie.

V. *De moderne axiomatica.* Inleiding. — De axioma-groepen van Hilbert. — Interpretaties van axioma- systemen.

VI. *Hyperbolische meetkunde.* VII. *Elliptische meetkunde.*

Dr. H. J. E. BETH

NEWTON'S PRINCIPIA

I 169 blz., II 146 blz. geb. . . . . . à f 4.25

(Voor int. op Noordhoff's Tijdschriften samen f 6.25)

Deel IV Deel V H. B. I. Het leven van Newton. — Het doel en de vorm van het werk. — De definities van de grondbeginselen der dynamica. — Het scholium aangaande Ruimte en Tijd. — De wetten der beweging. — De methode der eerste en laatste verhoudingen. — Over de bepaling van centrale krachten. — Over de beweging der lichamen in excentrische kegelsneden. — Nadere beschouwing der beweging onder centrale krachtwerking. — Over het rondloopen van de lijn der apsiden. — Over de beweging van lichamen, die aantrekkende krachten op elkaar uitoefenen. — Theorie van de maan. — Over de aantrekkende krachten van bolvormige en andere lichamen.

II. Het polemische karakter van Liber II. — De beweging van een stoffelijk punt bij verschillende onderstellingen omtrent de weerstand. — De fluxierekening. — De weerstand van fluida. — Het voortloopen van golven in een fluidum. — De Vortex-beweging. — De ontdekking der gravitatiewet. — De regulae phylosophandi. — Afleiding van het algemeene gravitatiebeginsel. — Verklaring van het wereldstelsel. — De afgeplatte gedaante der planeten. — Eb en vloed. — De praecessie. — De kometen. — Het Scholium generale.

Voor hen, die deze aflevering ontvangen, stellen we deze boeken verkrijgbaar voor de verminderde prijzen en alle deelen tegelijk besteld voor slechts f 18.—.

P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN—BATAVIA

NOORDHOFF's VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN

„We stellen er prijs op onze verheugenis te uiten over de wijze, waarop Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken een tijdperk heeft geopend van opleving in onze vaderlandsche wiskundige literatuur. Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde mag met recht roem dragen op haar initiatief." Weekbl. voor Gymn. en M. O. **Dr. S. L. van Oss.**

Reeds verschenen:

Deel I. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** De Vierde Dimensie. **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **3.90**

Deel II. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Grepen uit de Moderne Meetkunde. 1e deel: Reciproke Transformaties in het vlak en in de ruimte. Hyperboloïden en kegelsneden. Harmonische eigenschappen en cirkelbundels. Met 224 figuren in den tekst. Gebonden . . . . *f* **11.40**

Deel III. **Prof. Dr. G. Schouten.** De Grondslagen der Rekenkunde. Met toepassingen op grenswaarden, oneindige reeksen en producten, gedurige breuken, dubbelreeksen. **2e druk.** Gebonden . . . *f* **3.90**

Deel IV. **Prof. Dr. J. A. Barrau.** Analytische Meetkunde. 1e deel: Het Platte Vlak. **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **10.20**
2e deel: De Ruimte, gebonden . . . . *f* **14.50**

Deel V. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Leerboek der Theoretische Rekenkunde. 1e deel: Natuurlijke getallen en cardinaalgetallen. Het rekenen in talstelsels en met positieve en negatieve getallen. Binomium van Newton en de stellingen van Fermat en Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken van deelbaarheid. Ontbinding der Faculteiten. Geb. *f* **10.20**

Deel VI. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening, en van de Theorie der Differentiaalvergelijkingen.
1e deel: De Differentiaal- en Elementaire Integraalrekening, **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **19.20**
2e deel: Integraalrekening. Gebonden . . . . - **16.50**
3e deel: Differentiaalvergelijkingen, gebonden . . . . - **19.20**
De drie deelen te zamen besteld . . . . - **48.—**

Deel VII. **Prof. Dr. J. G. Rutgers.** Inleiding tot de Analytische Meetkunde.
1e deel: Het platte vlak, gebonden, **2e druk** . . . . . . *f* **6.50**
2e deel: De ruimte, gebonden met atlas . . . . - **6.50**

Deel VIII. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde. Gebonden . . . . *f* **7.50**

Deel IX. **Prof. Dr. J. G. Rutgers.** Meetkunde der Kegelsneden, gebonden met atlas . . . . *f* **5.—**

Deel X. **Prof. Dr. C. H. van Os.** Moderne Integraalrekening. Geb. *f* **5.50**

Deel XI. **Prof. H. J. van Veen.** Leerboek der Beschrijvende Meetkunde
1e deel: Projectiemethoden, gebonden . . . . *f* **6.90**
2e deel: Oppervlakken en Ruimtekrommen, gebonden . . . - **7.75**

Deel XII. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Beknopte Hoogere Algebra *f* **15.—**

Deel XIII. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal. Gebonden . . . . *f* **7.50**

Deel XIV. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Het Natuurlijke Getal . . *f* **5.90**

☞ Inteekenaars op het „N. T. v. Wiskunde", „Chr. Huygens" of „Euclides" genieten bij verschijning van deze en andere werken in Noordhoff's fonds belangrijke prijsvermindering.